

A matematika nyelvéről – bevezetés

Wetzl Ferenc

2012-02-07

- 1 Matematika
 - Kijelentő mondatok
 - Matematikai kijelentések szerkezete
- 2 Logikai műveletek
 - Állítások tagadása
 - És, vagy, ha...akkor, pontosan akkor, nem
 - Implikáció megfordítása
 - Szükséges és elegendő/elégséges
 - Kontrapozíció
 - de Morgan azonosságok
- 3 Kvantorok
 - Minden..., van olyan...
- 4 Halmazműveletek és logikai műveletek
 - Halmazok
 - Halmazműveletek
 - Végtelen halmazok

Matematika: bizonyos szerkezetű kijelentő mondatok.

- Értelmetlen
 - Szintaktikailag (formailag) hibás
 - NAGY ÖROM Használat utmutat: Biztos nagy az öröm! Hogy a gyermek aztot a játé néki ünneplő alkalma kezébe venni által kissé tanulás célzatából kaptál. Tehátakorló sok! 1. A doboz tetővel bír. Ez leszedés után szbad benyujtás a kéznek, négyszögalak elektron csellentyűcske. 2. Alapos és kézbentartva alányulva óvatos doboz fenekéről első játék bekezdését. 3. Futylim! Felszólit! A játék elektromos felnőtt nélkül feljesen uldaba! 4. Minezután meg lehet kezdeni játszását a játéknak vele. 5. Fogjátok a drót alfalát a kéz megsujja közé, és jobb kezetek föl le mozgat, majd onnét villany bekapcsol, hirtelen omirolni előre, különben nem jön a villany se át, se hosszú se tyű! 6. Egyfejű magánjáték ha vatytok egyed és nincs játzó önmagatokból is összerakni és az nyer aki előbb. Mindenfejű vételeمبرnek üzen kedves játszás Gyártmányó cég
 - Szemantikailag (tartalmilag) hibás
 - „a pő, ha engemély kimár, de mindegegy, ha vildagár”
 - Én most hazudok.
- Értelmes – a szerkezetén múlik
 - Igaz
 - Hamis

A matematikai kijelentések olyan mondatok, amelyekben

- matematikai objektumok (pl. szám, halmaz, függvény, osztható...)
- logikai konnektívumok (és, vagy, ha... akkor, minden, van olyan...)

Példa

Mi az alábbi állítások tagadása?

- Esik az eső. E
- **Nem** esik. $\neg E$
- Esik az eső **és** süt a nap. $E \wedge F$ ($E \& F$)
- **Nem** esik **vagy** **nem** süt. $\neg E \vee \neg F$
- Ma moziba megyünk **vagy** fagyizunk. $M \vee F$
- **Nem** megyünk moziba **és** **nem** fagyizunk. $\neg M \wedge \neg F$
- **Ha** hétfőn nem futunk, (**akkor**) futunk kedden. $H \Rightarrow K$
- Hétfőn nem futunk **de/és** kedden **sem**. $H \wedge \neg K$
- **Ha** hétfőn futunk, futunk kedden is. $H \Rightarrow K$
- Hétfőn futunk **de** kedden **nem**. $H \wedge \neg K$

Definíció

Jelöljön P és Q két állítást. Igazságtáblájukkal a következő logikai műveleteket definiáljuk (0 = hamis, 1 = igaz):

- tagadás, negáció (\neg , „nem”, NOT),
- és, konjunkció, logikai szorzás (\wedge , „és/de”, AND),
- (megengedő) vagy, diszjunkció, logikai összeadás (\vee , „vagy”, OR),
- kizáró vagy (\otimes , „vagy... , vagy”, XOR),
- implikáció (\Rightarrow , „ha... , akkor...”),
- ekvivalencia (\Leftrightarrow , „pontosan akkor”, „akkor és csak akkor”),

P	$\neg P$	P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \otimes Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
0	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0
		1	0	0	1	1	0	0
		1	1	1	1	0	1	1

Definíció

Két logikai kifejezést **azonosnak** (**azonosan egyenlőnek**) tekintünk, ha logikai értékük a bennük szereplő logikai változók bármely értékére azonos. Az azonosság jele \equiv .

Ha nem futunk hétfőn, futunk kedden \equiv Hétfőn vagy kedden futunk.

Példa (Az implikáció ekvivalens alakja)

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

Megoldás

A	\Rightarrow	B	\equiv	\neg	A	\vee	B
0	1	0	✓	1	0	1	0
0	1	1	✓	1	0	1	1
1	0	0	✓	0	1	0	0
1	1	1	✓	0	1	1	1

Nem igaz, hogy ha nem futunk hétfőn, futunk kedden \equiv

Se hétfőn se kedden nem futunk.

Nem igaz, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon \equiv$

$n > N$, de $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

Példa (Az implikáció tagadása)

$$\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$$

Megoldás

\neg	$(A \Rightarrow B)$	\equiv	A	\wedge	\neg	B
0	0	1	0	✓	0	0
0	0	1	1	✓	0	0
1	1	0	0	✓	1	1
0	1	1	1	✓	1	0

Definíció

Az $A \Rightarrow B$ implikáció megfordításán az $B \Rightarrow A$ implikációt értjük.

Példa

Ha Béla orvoshoz megy, tiszta fehérneműt húz.

Ha Béla tiszta fehérneműt húz, orvoshoz megy.

Példa

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv A \Leftrightarrow B.$$

- Ha n osztható 4-gyel, akkor osztható 2-vel is.
 ha A , akkor $B \equiv$
 A igazsága elegendő (de nem szükséges) feltétele B igazságának \equiv
 B igazságának A igazsága elegendő (de nem szükséges) feltétele
- Csak akkor osztható n 4-gyel, ha 2-vel is.
 csak akkor A , ha $B \equiv$
 B igazsága A igazságának szükséges (de esetleg nem elegendő)
 feltétele \equiv
 A igazságának szükséges (de esetleg nem elegendő) feltétele B
 igazsága
- Matematikai szövegekben a fenti két mondatszerkezet ekvivalens:
 A elegendő feltétele B -nek, és B szükséges feltétele A -nak.
 Nem matematikai példa: csak akkor kapsz diplomát, ha befizeted a
 tandíjat!
- A szükséges és elegendő feltétele B -nek, azaz $A \Leftrightarrow B \equiv$
 csak akkor B , ha A (mert szükséges, azaz $B \Rightarrow A$), és ha A , akkor B
 (mert elégesség, azaz $A \Rightarrow B$). \equiv
 Akkor és csak akkor A , ha B

Példa

Mutassuk meg, hogy ha m és n olyan pozitív egészek, hogy $m + n \geq 49$, akkor $m \geq 25$ vagy $n \geq 25$.

Példa (Kontrapozíció)

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$$

Megoldás

A	\Rightarrow	B	\equiv	\neg	B	\Rightarrow	\neg	A
0	1	0	✓	1	0	1	1	0
0	1	1	✓	0	1	1	1	0
1	0	0	✓	1	0	0	0	1
1	1	1	✓	0	1	1	0	1

Példa (de Morgan azonosságok)

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

Megoldás

\neg	$(A$	\wedge	$B)$	\equiv	\neg	A	\vee	\neg	B
1	0	0	0	✓	1	0	1	1	0
1	0	0	1	✓	1	0	1	0	1
1	1	0	0	✓	0	1	1	1	0
0	1	1	1	✓	0	1	0	0	1

\neg	$(A$	\vee	$B)$	\equiv	\neg	A	\wedge	\neg	B
1	0	0	0	✓	1	0	1	1	0
0	0	1	1	✓	1	0	0	0	1
0	1	1	0	✓	0	1	0	1	0
0	1	1	1	✓	0	1	0	0	1

Jelölés

A $\forall xP(x)$ és a $\exists xP(x)$ jelölések jelentése: „minden x -re (igaz, hogy) $P(x)$ ” és „van olyan x , hogy $P(x)$ ”. A \forall ill. a \exists jel neve **univerzális** ill. **egzisztenciális kvantor**.

\forall : „minden”, „tetszőleges”, „bármely”, „akármelyik”, „bármikor”...

\exists : „van”, „van olyan”, „létezik”, „található olyan”, „megesik”...

Példa

Jelölje $P(x)$, hogy x prím, $S(x)$, hogy x páros és $O(x, y)$, hogy x osztója y -nak. Formalizáljuk az alábbi állításokat, és döntsük el, hogy igazak-e!

- Létezik páros prím. $\exists x[S(x) \wedge P(x)]$ i
- Minden prím páratlan. $\forall x[P(x) \Rightarrow \neg S(x)]$ h
- Ha x és y osztója z -nek, akkor xy is. $\forall x, y, z[O(x, z) \wedge O(y, z) \Rightarrow O(xy, z)]$ h

Példa

Mi az alábbi állítások tagadása?

- **Mindenki** szereti Júliát. $\forall x \in J [S(x)]$
- **Van** aki nem szereti. $\exists x \in J [\neg S(x)]$
- **Valaki** járt itt. $\exists x \in E [I(x)]$
- **Senki** sem járt itt. $\forall x \in E [\neg I(x)]$
- **Minden** ajtón **van** kilincs. $\forall a \in A \exists k \in K [R(a, k)]$
- **Van olyan** ajtó, amin **nincs** kilincs. $\exists a \in A \forall k \in K [\neg R(a, k)]$

Kvantoros állítások tagadása: $\forall \exists \dots A$ tagadása $\exists \forall \dots \neg A$.

Definíció

Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk **egyenlőnek**, ha elemeik ugyanazok. A halmazt, melynek nincs eleme, **üres halmaznak** nevezzük.

Jele: \emptyset . Az „ x dolog eleme az X halmaznak” jelölése: $x \in X$.

Az A halmazt a B halmaz **részalmazának** nevezzük ($A \subseteq B$), ha az A minden eleme B -nek is eleme. A **valódi része** B -nek ($A \subset B$), ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

Halmazokról mindig csak mint egy adott **alaphalmaz** részalmazairól beszélünk, még ha ezt az alaphalmazt nem is nevezzük meg.

Jelölés

\mathbb{R} : valósok, \mathbb{N} : természetes számok, \mathbb{Z} : egészek, \mathbb{Q} : racionálisok, \mathbb{N}^+ : pozitív egészek, \mathbb{R}^+ : pozitív valós számok.

A H halmaz azon x elemeinek halmazát, melyek a P tulajdonsággal rendelkeznek a következőképp adjuk meg:

$$\{x \in H : P(x)\}.$$

Definíció (Halmazműveletek)

Legyen A és B egy H halmaz két részhalmaza. Az A és B halmaz $A \cap B$ **metszetén** (közös részén) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek mindkét halmazban benne vannak:

$$A \cap B = \{x \in H : x \in A \wedge x \in B\}.$$

$A \cup B$ **egyesítettjén** (unióján) azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek a két halmaz közül legalább az egyikben benne vannak:

$$A \cup B = \{x \in H : x \in A \vee x \in B\}.$$

Az A és B halmaz $A - B$ **különbségén** az A összes olyan elemének halmazát értjük, amelyek nincsenek benne B -ben. Az A halmaz H -ra vonatkozó **komplementerén** a $H - A$ halmazt értjük. Jele \overline{A}_H . Ha az alaphalmaz nincs megnevezve, a komplementert egyszerűen \overline{A} jelöli.

$$\overline{A}_H = \{x \in H : x \notin A\}.$$

Definíció (Halmazok számossága)

Két halmaz azonos számosságú, ha elemeik közt létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés.

- A: 1 2 3 4 5 6 7 ...

A: 3 4 5 6 7 8 9...

B: 1 2

- A: 1 2 3 4 5 6 7 ...

A: 2 4 6 8 10 12 ...

B: 1 3 5 7 9 11 ...

- A: 1 2 3 4 5 6 7 ...

A: 1 2 6 7 15 16 28 ...

B: 3 5 8 14 17 27 ...

C: 4 9 13 18 26 ...

D: 10 12 19 25 ...

E: 11 20 24 ...

F: ⋮

Definíció (Megszámlálhatóan végtelen halmaz)

Egy halmazt megszámlálhatóan végtelennek nevezünk, ha egyenlő számosságú az \mathbb{N} halmazzal.

Tétel

Az egész számok és a racionális számok halmaza is megszámlálhatóan végtelen.

Tétel

A valós számok (és az irracionális számok) halmaza nem megszámlálható.

Bizonyítás

Indirekt bizonyítás:

1 0,3610513769310776034...

2 3,1159236543282345014...

3 0,1585026723823654328...

4 2,6748231345822345014...

5 7,5748700000000000000...

6 -0,6548727650234576800...

7 -5,2687623176577653234...

8 0,9870244807633333777...

9 0,1113554322346000214...

⋮

0,523315111

Amit tudni kell!

- 1 logikai műveletek műveleti tábláinak ismerete,
- 2 egyszerű logikai összefüggések igazolása táblázattal,
- 3 kvantorok,
- 4 logikai műveleteket és kvantorokat tartalmazó állítások tagadása,
- 5 halmzműveletek definíciói,
- 6 a természetes számok, a racionális és a valós számok számosságá.