

1. Mutassuk meg, hogy ha az \mathbf{a} és a \mathbf{b} vektorok nem kollineárisak, akkor $p\mathbf{a} + q\mathbf{b} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ ($p, q, x, y \in \mathbb{R}$) csak úgy állhat fenn, ha $p = x$ és $q = y$. (3 pont)

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy pl. $p \neq x$. Ekkor...

2. A differenciálhatóság törmentes alakja: Azt mondjuk, hogy az f függvény differenciálható az x_0 helyen, ha megadható x_0 -nak egy olyan E teljes környezete, valamint megadható egy olyan... (3 pont)

3. Legyen az $[a_n]$ valós számsorozat monoton növekvő, felülről korlátos, legkisebb felső korlátját jelölje s . Mutassuk meg, hogy az $[a_n]$ sorozatnak van határértéke, és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$. (5 pont)

Bizonyítás: Ehhez be kell látni, hogy $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}$ szám, hogy...

4. Felhasználva, hogy $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ és $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$, mutassuk meg a differenciálhatóság definíciójából kiindulva, hogy $(\sin x)' = \cos x$. (4 pont)

Bizonyítás: A \sin függvény differenciálhányadosa az x helyen definíció szerint...

5. Az f függvény x_0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor polinomja = ...

Speciálisan az $x \mapsto \ln(x + 1)$ függvénynek az $x_0 = 0$ ponthoz tartozó harmadfokú Taylor polinomja: (3 pont)

6. Integrál-középtétel és alkalmazása. (2+2 pont)

a) Ha az egyváltozós valós f függvény az $[a, b]$ intervallumon...

akkor van olyan $c \in [a, b]$ szám, hogy

b) Egy jármű sebessége az indulása utáni első 3 másodpercben $v(t) = t^2$. Melyik t időpillanatban egyezik meg az első 3 másodperc alatti átlagsebesség a pillanatnyi sebességgel?

7. Számítsuk ki az alábbi integrálokat! (3+3+4 pont)

a) $\int_0^4 \sqrt{x} + \sin \pi x \, dx$

b) $\int_0^\pi x \cos x \, dx$

c) $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx$

8. Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van az a pont egy teljes K környezetében. Az alábbi mondatok kiegészítésével adjunk meghatározásokat arra, hogy az „ f függvény folytonos az a pontban”. (4 pont)

a) Minden $\varepsilon > 0$ valóshoz van olyan $\delta > 0$ valós, hogy ha $x \in K$, és $|x - a| < \dots$ akkor...

b) Létezik az f bal és jobb oldali határértéke is az a -ban és a két határérték...

c) Bármely K -beli, a -hoz tartó $[x_n]$ sorozatra ...

egyenesek irányvektorát és metszéspontjuk koordinátáit!(3 pont)

d) Nem igaz az, hogy „ f -nek nincs határértéke a -ban, vagy ha van, nem ...”

9. Legyenek $a < b$ tetszőleges valós számok. Igazak-e az alábbi állítások? Írjunk I vagy N betűt a négyzetbe, és igazolásképpen I válasz esetén adjunk egy nagyon rövid indoklást, N válasz esetén egy példát. (6 pont)

a) Minden $[a, b]$ -n értelmezett függvény korlátos.

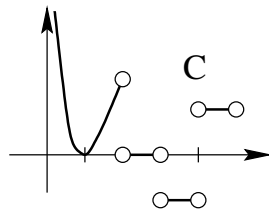
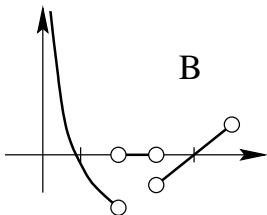
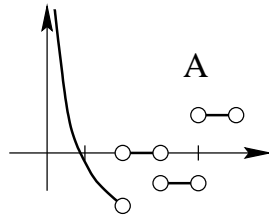
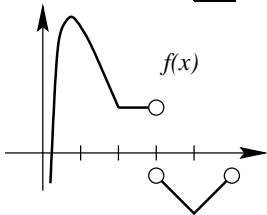
b) Minden $[a, b]$ -n értelmezett folytonos függvény korlátos.

c) Minden $[a, b]$ -n értelmezett differenciálható függvény korlátos.

13. A binomiális tétel szerint tetszőleges $a, b \in \mathbb{C}$ számokra (3 pont)

$$(a + b)^n =$$

10. Az alábbi ábrán látható $f(x)$ függvénynek az A, B vagy C ábrán látható függvény lehet a deriváltja? A hibás rajzokon jelöljük meg egy X betűvel a grafikonnak azt az ágát, mely mindeképpen hibás. (3 pont)



14. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek: (2+2+2 pont)

a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

11. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket! (2+3 pont)

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x} =$

b) $(x^x)' =$

12. Határozzuk meg az

$$x = 3t - 1, \quad y = 2 - t, \quad z = 3$$

valamint az

$$\frac{x+1}{2} = \frac{6-y}{2} = 3(z-2)$$