

1. Igazságtáblával igazoljuk a  $p \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$  azonosságot!  
(2 pont)

2. Bizonyítsuk be, hogy ha az egyváltozós valós  $f$  függvény az  $a$  pontban differenciálható, és  $a$  egy  $K$  környezetének minden  $x$  pontjára  $f(x) \geq f(a)$ , akkor  $f'(a) = 0$ .  
(4 pont)

3. A differenciálhatóság törtmentes alakja: Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény differenciálható az  $a$  helyen, ha megadható  $a$ -nak egy olyan  $E$  teljes környezete, valamint megadható egy olyan...  
(3 pont)

4. Vezessük le az arcsin függvény deriváltjára vonatkozó képletet!  
(3 pont)

5. Mutassuk meg a L'Hospital-szabály bizonyításának ötletét felhasználva, hogy ha az  $f$  és  $g$  valós függvények az  $a$  pont egy teljes környezetében folytonosan differenciálhatóak,  $f(a) = g(a) = 0$  és  $f'(a)/g'(a) = 2$ , akkor  
(4 pont)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 2.$$

6. A sin függvény harmadfokú Maclaurin-polinomja a maradéktaggal:  
(3 pont)

7. Változó felső határú integrál. Ha az egyváltozós valós  $f$  függvény...  
az  $[a, b]$  intervallumon, akkor az

$$I(x) := \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

függvény értelmezve van az  $[a, b]$  intervallumon, az  $(a, b)$  intervallumon pedig...

továbbá igaz a...

összefüggés. (2 pont)

8. Számítsuk ki az alábbi integrálokat! (3+2+3 pont)

a)  $\int_0^1 x e^x dx$

b)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

c)  $\int \frac{1}{\sqrt{-2x - x^2}} dx$

9. Egészítsük ki az alábbi állításokat úgy, hogy igazak legyenek.  
(7 pont)

a) Bármely valós együtthatós egyváltozós polinomfüggvény felírható elsőfokú és...

szorzataként. E felbontást a polinomfüggvény *valós szorzatalakjának* nevezzük, melynek általános alakja:

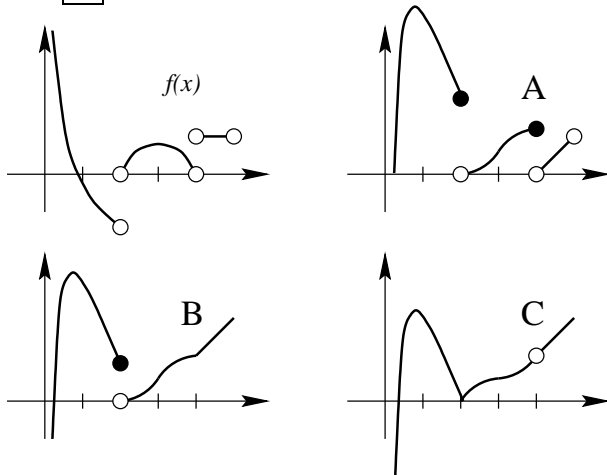
b) Legyenek  $f : u \mapsto f(u)$  és  $g : x \mapsto g(x)$  egyváltozós valós függvények. Ha  $g$  differenciálható az ... és... akkor  $f \circ g$  is differenciálható az  $x_0$  pontban és...

c) Az  $a$  pont egy teljes  $K$  környezetében értelmezett  $f$  függvény *folytonos* az  $a$  pontban, ha bármely  $K$ -beli  $a$ -hoz tartó  $[x_n]$  sorozatra...

d) *Határozott integrál definíciója.* Legyen az  $f$  az  $[a, b]$  intervallumon ...

Képezzük az  $[a, b]$  egy minden határon túl finomodó  $[B_n]$  beosztássorozatát, és ebből az  $f$  integrálközelítő összegeinek egy  $[I_n]$  sorozatát. Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény az  $[a, b]$  intervallumon integrálható, ha ...

10. Az alábbi ábrán látható  $f(x)$  függvénynek az A, B vagy C ábrán látható függvények melyike *nem lehet* a primitív függvénye? A hibás rajzon jelöljük meg egy X betűvel a grafikon hibás ágát.  (3 pont)



11. Igazak-e az alábbi állítások? Írjunk I vagy N betűt a négyzetbe, válaszunkat nagyon röviden indokoljuk! Ha a válasz „N”, írjuk le, hogyan lehet kijavítani az állítást! Ha az állítás egy tanult tétellel azonos, akkor elég annyit írni, hogy „TÉTEL”. (8 pont)

a) Ha az egyváltozós valós  $f$  függvénynek  $F$  és  $G$  primitív függvényei a  $T$  halmazon, akkor van olyan  $c \in \mathbb{R}$  szám, hogy  $x \in T$  esetén  $F(x) = G(x) + c$ .

b) Az  $x \mapsto e^x$  függvény előáll egy páros és egy páratlan függvény összegeként.

c) Ha a konvergens  $\sum a_n$  sor tagjainak sorrendjét felcseréljük, akkor az így kapott sor is konvergens lesz.

d) Ha az  $f$  függvény az  $x_0$  pontban differenciálható és  $f'(x_0) = 0$ , akkor  $f$ -nek az  $x_0$  pontban szélsőértéke van.

12. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket! (2+2 pont)

a)  $(\sqrt{\sin x^2})' =$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{3} + \left( \frac{n-2}{n} \right)^n \right) =$

13. Határozzuk meg az

$$x = 3t - 2, \quad y = 4, \quad z = 3 - 2t$$

egyenletrendszerű egyenes irányvektorát, az

$$x - 1 + y = 4z$$

egyenletű sík normálvektorát, valamint metszéspontjuk koordinátáit! (3 pont)

14. Írjuk fel a harmadik egységgyököket algebrai alakban! (3 pont)

15. Valamelyik konvergenciakritérium segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e: (2+3 pont)

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$