

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat (definíciókat, tételeket) úgy, hogy igazak legyenek. (13 pont)

a) *Darboux-tétel*: Ha a és b olyan intervallum pontjai, amelyen az f függvény ...

akkor az függvény az a -beli és a b -beli értéke közt minden értéket fölvesz.

b) *Inverz függvény deriváltja*: Legyen f az I intervallumon értelmezett függvény. Ha f az I minden pontjában diffható, és f' az I -n ...

akkor f^{-1} az értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható, és

$$(f^{-1})'(x) =$$

c) *Lokális szélsőérték*: Tegyük fel, hogy f'' folytonos az $x = c$ pontot tartalmazó nyílt intervallumon. Ha és, akkor f -nek lokális maximuma van az $x = c$ pontban.

d) *Függvény átlaga*: Az $[a, b]$ intervallumon függvény *átlaga* ezen az intervallumon. ...

e) *Newton-Leibniz-tétel 1. rész*: Ha f az $[a, b]$ intervallumon, akkor az

$$F(x) = \int_{\dots}^{\dots} \dots$$

függvény az $[a, b]$ intervallumon, az (a, b) intervallumon, továbbá igaz a következő összefüggés:

f) *Határozott integrál*: Legyen f az $[a, b]$ intervallumon értelmezett korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy I az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett határozott integrálja, ha

hogy $[a, b]$ minden olyan $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ felosztására, amelyre $\|P\| < \delta$, bárhogyan is választjuk ki c_k -t az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumból, teljesül, hogy

2. Mennyi az értéke az alábbi kifejezéseknek? (3 pont)

a) $\arcsin(\sin(\frac{5\pi}{4})) =$

b) $\operatorname{tg}(\arcsin(\frac{3}{5})) =$

c) $3^{1/\ln 3} =$

3. Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, és legyen $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. Feltétlenül felveszi-e f a 0 értéket a $(0, 1)$ intervallumon (írjunk a négyzetbe I-t, ha igen, N-et ha nem), ha f a $[0, 1]$ intervallumon (2 pont)

a) folytonos?

b) differenciálható?

c) integrálható?

4. Mutassuk meg, hogy ha az $y(x)$ függvény eleget tesz az $x^3 + y^3(x) = 25 + xy(x)$ egyenletnek, és $y(1) = 3$, akkor lokális maximuma van az $x = 1$ helyen. (3 pont)

5. Számítsuk ki az alábbi határértékeket! (4 pont)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x \operatorname{tg}(3x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 - \cos(\frac{\pi}{2}x)}{\ln x} =$$

6. Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! (4 pont)

$\operatorname{arch} x$	
$\frac{1}{\ln x }$	

7. Számítsuk ki az alábbi integrálokat! (9 pont)

a) $\int_{-2}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4} dx =$

b) $\int x e^{2x} dx =$

c) $\int_{-3}^{-2} \frac{5x + 2}{x^2 + x} dx =$

8. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelyik tartalmazza az $x = t + 2$, $y = t + 3$, $z = 2t + 4$ egyenletrendszerű egyenest, és párhuzamos az x -tengellyel! (3 pont)

9. Határozzuk meg és ábrázoljuk a $z^6 = -1$ egyenlet megoldásait! (4 pont)

10. Bizonyítsuk be az arcsin függvény deriváltjára vonatkozó összefüggést! (5 pont)