Mat. A2 b 4. gyak.

Lineáris függetlenség, alterek

1. Az alábbi vektor-rendszerek lin. függetlenek-e?

a) (1,2,1), (2,5,0), (3,3,8) b) (1,2,-1), (6,4,2), (4,-1,5)

2. Az R^3 alábbi részhalmazai alterek-e? Ha igen, adja meg a tér egy bázisát (a teret kifeszítő lineárisan független vektorokat).

a) $W = \{(a,0,0) : \text{a valós}\}$ b) $W = \{(n,m,l) : n,m,l \text{ egész}\}$

c) $W = \{(a,b,c) : b = a + c\}$ d) $W = \{(a,b,c) : a + b + c = 1\}$

e) $W = \{(a,b,c) : \|(a,b,c)\| \le 1\}$ f) $W = \{(a,b,c) : a + b = 0\}$

3. Adottak az $\underline{u}$=(0,3,1,-1), $\underline{v}$=(6,0,5,1) és $\underline{w}$=(4,-7,1,3) vektorok. Adja meg az S=span$\{\underline{u},\underline{v},\underline{w}\}$ lin. teret kifeszítő vektorokat és a maradék vektort a független vektorok lin. kombinációjaként.

4. Mutassa meg, hogy lineárisan vektorok halmazának bármely nem-üres részhalmaza lin. független vektorokból áll.

5. Ig.: Lineárisan összefüggő vektorok halmazát bármely vektorral kibővítve lineárisan összefüggő vektorokat kapunk.

6. Ha $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w} \in R^3$ tetszőleges vektorok, akkor az $\underline{u} - \underline{v}$, $\underline{v} - \underline{w}$, $\underline{w} - \underline{u}$ lineárisan összefüggő vektorok.

7. Adja meg az alábbi hom.lin. egy.r. megoldásainak halmazát, mint altér (lin. független megoldások lin. komb.-ói).

a) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 \\ -1 & -6 & -1 & -3 \\ 2 & 12 & 5 & -18 \end{bmatrix}\underline{x} = \underline{0}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}\underline{x} = \underline{0}$

8. Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -2 \end{bmatrix}$. A a mely értékére létezik az inverz mátrix?

9. A b mely értékére létezik az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\underline{x} = b\underline{x}$ egyenletr.-nek nem triviális megoldása?

10. Oldja meg Cramer-szabállyal az alábbi egy. r.-t.

a)
$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 3y + z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= 11 \end{aligned}$$

11. Adja meg az alábbi determinánsok értékét.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$