

1. Oldjuk meg az alábbi szimultán egyenletrendszer (két azonos együtthatómátrixú egyenletrendszer) Gauss-Jordan-módszerrel és mátrixinvertálással! Végül határozzuk meg csak az x és az a ismeretlenek értékét Cramer-szabállyal is. (8 pont)

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 1 \\ 2x + 3y & = & 2 \\ y + z & = & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a + 2b & = & 4 \\ 2a + 3b & = & 7 \\ b + c & = & 2 \end{array}$$

2. Határozzuk meg a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! (5 pont)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg az alábbi \mathbf{A} mátrix által generált $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés magterének és képterének bázisát! (4 pont)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Adjuk meg az $f(x, y) = (2x - y, x + y)$ lineáris transzformáció mátrixát az $\{\mathbf{i} + \mathbf{j}, -\mathbf{j}\}$ bázisban. (4 pont)

5. Mennyi az $f(x, y, z) = e^x \cos yz$ függvény iránymenti deriváltja a $P(0, 0, 0)$ pontban a $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$ vektor irányában? (3 pont)

6. Határozzuk meg az

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 2xy$$

függvény lokális szélsőérték helyeit, és mutassuk meg a definíciót felhasználva (például a függvényt két megfelelően választott egyenes fölött vizsgálva), hogy a függvénynek a $(0, 0)$ pontban nyeregpontja van. (6 pont)

7. Cseréljük meg az integrálás sorrendjét az alábbi integrálban, majd számítsuk ki az integrál értékét! (6 pont)

$$\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos(16\pi x^5) \, dx \, dy$$

8. Polárkoordinátákra áttérve számítsuk ki az alábbi integrál értékét! (4 pont)

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x^2 + y^2 \, dx \, dy$$

9. Határozzuk meg az $f(x, y) = e^x \cos y$ függvény $P_0(0, 0)$ ponthoz tartozó 1) teljes differenciálját, 2) érintősíkjának egyenletét, 3) lineáris közelítését megadó függvényét. (6 pont)

10. Az integrálkritérium alkalmazásával mutassuk meg, hogy az $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ sor divergens, míg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ sor konvergens. (4 pont)