Lineáris algebra
(tömör bevezetés)

Wettl Ferenc, BME

2007-06-03, 0.4 változat

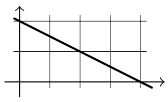
Tartalomjegyzék

Geometriai szemléltetés

E fejezetben geometriai szemléltetéseket adunk a 2- és 3-ismeretlenes egyenletrendszerekre és azok megoldásaira.

Az egyenletek szemléltetése

P Tekintsünk a kétváltozós lineáris $ax + by = c$ egyenletet, ahol a, b és c valós konstansok. Középiskolából tudjuk, hogy ha a és b legalább egyike nem nulla, akkor azoknak az (x, y) pontoknak a mértani helye, melyek kielégítik ezt az egyenletet, egy egyenes. Ha pedig $a = b = c = 0$, akkor az egyenlet alakja $0x+0y = 0$, azaz $0 = 0$, ami minden (x, y) számpárra fennáll, vagyis az egyenletet kielégítő (x, y) pontok halmaza az egész sík. Végül ha $a = b = 0$, de $c \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Például az $x + 2y = 4$ egyenlet grafikonja a következő ábrán látható. Ez könnyen megkapható, ha $x = 0$, illetve $y = 0$ behelyettesítéssel meghatározzuk az egyenesnek a tengelyekkel való metszéspontjait, vagy bármely másik két pontját.



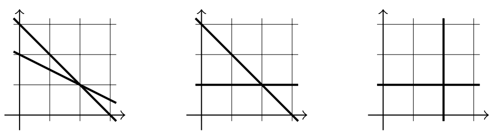
1.P Tekintsük az

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Két lépésben megoldhatjuk, ha az első egyenletet kivonjuk a másodikból, majd az így kapott egyenletrendszerben a másodikat kivonjuk az elsőből, azaz:

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer két egyenlete egy-egy egyenes egyenlete a síkban. Az, hogy az egyenletrendszer megoldható, pontosan azt jelenti, hogy a két egyenesnek van közös pontja, példánkban az $(2, 1)$ pont. A következő ábrák a megoldás lépéseit szemléltetik az egyenletek grafikonjával:



P Tekintsük az

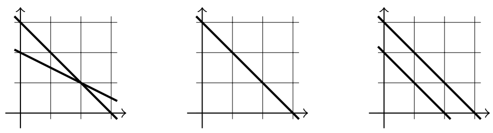
$$\begin{aligned} x+y&=3\\ x+y&=2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Látható, hogy ez két párhuzamos egyenes egyenlete, melyeknek nincs közös pontjuk, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Ha az első egyenletet kivonjuk a másodikból, az ellentmondó $0=-1$ egyenletet kapjuk, vagyis így is arra jutottunk, hogy az egyenletrendszer nem oldható meg. Az

$$\begin{aligned} x+y&=3\\ x+y&=3 \end{aligned}, \text{ vagy az } \begin{aligned} x+\ \ y&=3\\ 2x+2y&=6 \end{aligned}$$

egyenletrendszerekben az első egyenlettel kiejthető a második, így csak az $x+y=3$ egyenlet marad. Ennek összes megoldása például úgy jellemezhető, hogy ha $y=t$, ahol t egy tetszőleges valós szám, akkor $x=3-t$, vagyis az összes $(x,y)=(3-t,t)$ számpár megoldás. Ezek a pontok épp az $x+y=3$ egyenletű egyenes pontjai.

Összefoglalva: két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer esetén négy eset lehetséges. Vagy *a)* a két egyenlet grafikonja két metsző egyenes, ekkor csak egyetlen megoldás van, a két egyenes metszéspontja, vagy *b)* a két egyenlet grafikonja két egybeeső egyenes, ekkor végtelen sok megoldás van, ennek az egyenesnek a pontjai, vagy *c)* a két egyenlet grafikonja párhuzamos, de különböző egyenes, ekkor nincs megoldás. A negyedik *d)* eset az, amikor mindkét egyenlet $0x+0y=0$ alakú, ekkor is végtelen sok megoldás van, nevezetesen minden lehetséges (x,y) számpár, azaz a sík összes pontja megoldás. Az első három esetet szemlélteti az alábbi ábra:



Értelemszerűen kiterjeszthető ez az osztályozás azokra az esetekre is, amikor az egyenletrendszer nem kettő, hanem tetszőleges számú egyenletből áll.

Hasonló osztályozás végezhető háromváltozós egyenletrendszerek esetén is. Ekkor minden egyenlet egy sík egyenlete. Az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a síkoknak van közös pontjuk. Ha az egyenletrendszer megoldható, a megoldások halmaza vagy egyetlen pont, vagy egy egyenes, vagy egy sík összes pontja, a $0x+0y+0z=0$ alakú egyenlet esetén pedig a tér összes pontja. Ha a síkoknak nincs közös pontjuk, az egyenletrendszer nem oldható meg.

2.P Vizsgáljuk meg az

$$\begin{aligned} x+\ \ y+\ \ z&=4\\ x+\ \ y-\ \ z&=2\\ 2x+2y\qquad&=6\\ 2z&=2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ha az első és második egyenletet kivonjuk a harmadikból, majd az elsőt kivonjuk, a másodikat hozzáadjuk a negyedikhez, a harmadik és negyedik egyenlet helyén a $0=0$, pontosabban a $0x+0y+0z=0$ egyenletet kapjuk, mely elhagyható. Végül az első egyenletet kivonva a másodikból, a másodikat osztva mínusz kettővel, majd kivonva az elsőből, az

$$\begin{aligned} x+y\qquad&=3\\ +z&=1 \end{aligned}$$

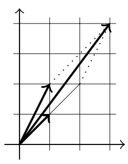
egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása az y-nak tetszőleges t értéket választva: $x=3-t$, $y=t$, $z=1$. Ez egy egyenes paraméteres egyenletrendszere. A négy egyenlet tehát négy, egy egyenesen átmenő síkot határoz meg. A megoldások száma végtelen.

Az egyenletrendszer vektoregyenlet-alakja

M Az 1. példában szereplő egyenletrendszer ekvivalens az alábbi vektoregyenlettel:

$$(1,1)x+(1,2)y=(3,4).$$

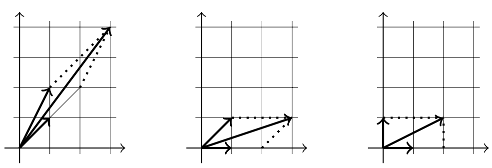
Ez azt jelenti, hogy keressük a $(3,4)$ vektornak az $(1,1)$ és az $(1,2)$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre való felbontását. (Később úgy fogunk fogalmazni, hogy állítsuk elő a $(3,4)$ vektort az $(1,1)$ és az $(1,2)$ vektorok lineáris kombinációjaként.) E felbontást mutatja az alábbi ábra, melyről leolvasható, hogy $x=2$, $y=1$ a megoldás:



Ha követjük az 1. pédabeli egyenletrendszer megoldásainak lépéseit a megfelelő vektoregyenleteken, a következő sorozatot kapjuk:

$$\begin{aligned} (1,1)x+(1,2)y=(3,4) &\Rightarrow (1,0)x+(1,1)y=(3,1)\\ &\Rightarrow (1,0)x+(0,1)y=(2,1) \end{aligned}.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldásának lépései a vektoregyenlettel szemléltetve:



Itt is az utolsó ábra mutatja legvilágosabban a megoldást ($x=2$, $y=1$), azt viszont, hogy mi is történik az átalakítás közben, később fogjuk megérteni.

Egyenletrendszerek

Az $\mathbf{R}^n$ tér

3.D $\mathbf{R}^n$ a Descartes-szorzat definíciója alapján az $\mathbf{R}$ elemeiből képzett rendezett szám-n-esek halmazát jelöli. Ugyanezt a jelölést használjuk az n-dimenziós vektorok halmazára is. Ha a vektorok halmazát ellátjuk az összeadás és a valós skalárral való szorzás műveletével is, akkor az $\mathbf{R}^n$-ről, mint ***vektortér***ről beszélünk.

$\mathbf{C}^n$ jelöli a rendezett komplex szám-n-esek, és egyúttal az n-dimenziós komplex vektorok halmazát is. Ha ez utóbbi halmazt ellátjuk a vektorösszeadás és a komplex skalárral való szorzás műveletével, akkor az ugyancsak $\mathbf{C}^n$-nel jelölt komplex n-dimenziós vektortér fogalmához jutunk.

D Az $\mathbf{R}^n$ tér $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vektorainak $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbf{R}$ konstansokkal vett ***lineáris kombinációján*** a $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$ összeget értjük. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor előáll a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha léteznek olyan $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbf{R}$ konstansok, hogy $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$.

M Az $\mathbf{R}^n$ tér minden $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektora egyértelműen előáll az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,... $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ vektorok lineáris kombinációjaként, nevezetesen $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. Speciálisan $\mathbf{R}^3$-ben minden (x, y, z) vektorra $(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

D Az $\mathbf{R}^n$ tér $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,... $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ vektorait $\mathbf{R}^n$ ***standard bázis***ának nevezzük.

D Az $\mathbf{R}^n$ tér $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_m$ vektoraira azt mondjuk, hogy ***lineárisan függetlenek***, ha csak a 0 konstansokkal vett lineáris kombinációjuk ad 0-vektort, azaz ha abból, hogy $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$, következik, hogy $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$. ***Lineárisan összefüggőek*** azok a vektorok, melyek nem lineárisan függetlenek.

4.T Egyetlen vektor akkor lineárisan független, ha nem a 0-vektor. Legalább két vektora pontosan akkor lineárisan független, ha egyikük sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Eszerint egy legalább két vektorból álló vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van köztük olyan, amely előáll a többi lineáris kombinációjaként.

B Az egy vektorra vonatkozó állítás a definíció alapján világos. Tekintsünk a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_m$, vektorrendszert, mely legalább két vektorból áll, tehát $m \geq 2$.

Az az állítás, hogy „legalább két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha egyikük sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként”, ekvivalens azzal, hogy „egy legalább két vektorból álló vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van köztük olyan, amely előáll a többi lineáris kombinációjaként”.

Tegyük fel, hogy a vektorok valamelyike, mondjuk a $\mathbf{v}_1$ kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{v}_1 = k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_m\mathbf{v}_m$. Ekkor átrendezés után azt kapjuk, hogy $\mathbf{v}_1 - k_2\mathbf{v}_2 - \cdots - k_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$. Ez azt jelenti, hogy a vektoroknak van olyan lineáris kombinációjuk, mely a 0-vektort adja, de nem minden együttható 0, hisz $\mathbf{v}_1$ együtthatója 1, azaz a vektorok összefüggőek.

Most tegyük fel, hogy a vektorok lineárisan összefüggőek, azaz léteznek olyan nem csupa 0 konstansok, melyekkel vett lineáris kombinációjuk a 0-vektor, azaz $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$. A k_i konstansok legalább egyike nem 0, mondjuk legyen ez épp a k_1. Ezzel végigosztva kapjuk, hogy $\mathbf{v}_1 + \frac{k_2}{k_1}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{k_m}{k_1}\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{v}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\mathbf{v}_m$. Tehát ki tudtuk az egyik vektort fejezni a többi lineáris kombinációjaként.

P Az $(1, 2, 3)$, $(-2, 0, 1)$, $(4, 4, 5)$ vektorok lineárisan összefüggőek, mert $-2 \cdot (1, 2, 3) + 1 \cdot (-2, 0, 1) + 1 \cdot (4, 4, 5) = (0, 0, 0)$. Az összefüggőség úgy is belátható, hogy megmutatjuk, van olyan vektor, amelyik a többi lineáris kombinációja. Itt például $(4, 4, 5) = 2 \cdot (1, 2, 3) + (-1) \cdot (-2, 0, 1)$.

Egyenletrendszerek leírása, mátrixok

5.D ***Lineáris egyenletrendszer***en olyan egyenletrendszert értünk, mely véges sok elsőfokú egyenletből áll, és véges sok ismeretlent tartalmaz. Az n-ismeretlenes, m egyenletből álló ***lineáris egyenletrendszer*** a következő ***általános alak***ra hozható:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ahol x_j jelöli az egyenletrendszer ismeretleneit, b_i a konstansait és a_{ij} az együtthatóit ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$). A lineáris egyenletrendszert ***homogén***nek mondjuk, ha $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, és ***inhomogén***nek, ha a konstansok legalább egyike nem 0.

D Egyenletrendszer ***elemi átalakításain*** a következő három transzformációt értjük:

- két egyenlet felcserélése;
- egy egyenlet nem 0 számmal való beszorzása;
- egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.

6.T Egyenletrendszer elemi átalakításai ekvivalens átalakítások, azaz az eredeti és az átalakított egyenletrendszernek azonosak a megoldásai.

B Az első két elemi átalakításra ez nyilvánvaló. Nézzük a harmadikat, legyen c egy tetszőleges konstans. Könnyen látható, hogy ha egy egyenlet, például az i-edik c-szeresét hozzáadjuk egy másik egyenlethez, például a j-edikhez, akkor a régi egyenletrendszer minden megoldása az újnak is megoldása. Ezután az új egyenletrendszer i-edik egyenletének $-c$-szeresét hozzáadjuk a j-edikhez. Így visszakapjuk a régit, tehát az új egyenletrendszer minden megoldása megoldása a réginek is. Vagyis a két megoldáshalmaz megegyezik. Tehát ez az elemi átalakítás is ekvivalens átalakítás.

M Az egyenletrendszert megoldásakor elemi átalakításokkal olyan alakra hozzuk, amelyből a megoldás könnyen leolvasható. A megoldás lépéseinek lejegyzéséhez elegendő a lineáris egyenletrendszer együtthatóinak és konstansainak változását egy számtáblázatban számon tartani.

7.D Az m sorba és n oszlopba rendezett mn elemű sorozatokat $m \times n$ típusú ***mátrix***oknak nevezzük. Egy mátrix egy elemének ***index***én azt a számpárt értjük, melyből az első szám azt mondja meg, hogy az elem hányadik sorban, míg a második azt, hogy az elem hányadik oszlopban van. Pl. az $a_{i-1,2}$ elem a mátrix $i-1$-edik sorában és a 2. oszlopában van. Ha az index mindkét eleme egyjegyű, a vessző elhagyható, pl. b_{ij} az i-edik sor j-edik elemét jelöli. A mátrixokat könyvekben félkövér ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$), kézírásban gyakran kétszer aláhúzott nagy betűvel ($\underline{\underline{A}}$) jelölik, indexében gyakran szerepel a mérete ($\mathbf{A}_{m\times n}$). Egy $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra, melynek i-edik sorában és j-edik oszlopában az a_{ij} elem áll, a következő jelöléseket használjuk:

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n} \tag{2}$$

Egy egyenletrendszer együtthatói is mátrixba rendezhetők. Az (1) ***egyenletrendszer mátrixán*** vagy együtthatómátrixán a (2)-beli mátrixot értjük, míg ***kiegészített mátrixán*** a következőt:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{3}$$

Az egyenletrendszeren végrehajtott elemi átalakítások a kiegészített mátrix sorain hasonló műveletekkel megvalósíthatók; ezeket ***elemi sorműveletek***nek nevezünk. Az elemi sorműveletek tehát a következők:

- két sor felcserélése;
- egy sor nem 0 számmal való beszorzása;
- egy sor konstansszorosának egy másikhoz adása.

Az elemi sorműveletekre a következő jelöléseket használjuk: $S_i \leftrightarrow S_j$ jelöli az i-edik és a j-edik sorok cseréjét, kS_i az i-edik sor k-val való szorzását és $+kS_i \to S_j$ jelöli azt, ha az i-edik sor k-szorosát a j-edikhez adjuk.

M Az a kérdés, hogy az m-dimenziós $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_n$ vektorok melyik lineáris kombinációja egyenlő egy adott $\mathbf{b}$ vektorral – azaz, hogy az $x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\dots+x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ vektoregyenletnek mik a megoldásai – egy n-ismeretlenes, m egyenletből álló lineáris egyenletrendszerrel írható le.

Speciális alakú mátrixok

D A (2)-beli $\mathbf{A}$ mátrix ***főátló***ján az $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ elemeket értjük, ahol r egyenlő az m és az n számok közül a kisebbikkel. Az $\mathbf{A}$ ***mellékátlója*** azokból az elemekből áll, amelyek sor- és oszlopindexének összege $n+1$.

P Az alábbi mátrixokban a fő- illetve a mellékátlót kiemeltük:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 5 \\ 4 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 3 & 2 & 5 \\ 2 & \mathbf{0} & 3 & 6 \\ 3 & 9 & \mathbf{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mathbf{2} \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{3} & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

D Az $n \times n$ típusú mátrixokat ***négyzetes mátrixok***nak nevezzük. Egy mátrixot diagonálisnak nevezünk, ha nemnulla elemei csak a főátlóban lehetnek. Egy mátrixot ***felső***, illetve ***alsó háromszög***mátrixnak nevezünk, ha a főátló alatt, illetve felett csak nullelemek állnak. Az alábbi ábrán egy diagonális, egy felső és egy alsó háromszögmátrix látható:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az $n\times 1$ típusú mátrixokat, vagyis az egyetlen oszlopból álló mátrixokat ***oszlopvektor***oknak, míg az $1 \times n$ típusú mátrixokat ***sorvektor***oknak fogjuk nevezni. A vektorokat mátrixjelölés esetén az oszlopvektorokkal fogjuk azonosítani, tehát pl. az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ill. a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ vektort

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ ill. } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

fogja jelölni.

D A négyzetes $[a_{ij}]_{n\times n}$ mátrixot ***szimmetrikus***nak nevezzük, ha minden i, j esetén $a_{ij} = a_{ji}$, ***ferdén szimmetrikus***nak, ha minden i, j esetén $a_{ij} = -a_{ji}$.

M Ferdén szimmetrikus mátrix főátlójában szükségképpen 0-k állnak. Az alábbi mátrix ferdén szimmetrikus:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

8.M Minden mátrix tekinthető úgy, mint amely oszlopvektorokból, illetve sorvektorokból áll. Pl. ha a (2)-beli $\mathbf{A}$ mátrix j-edik oszlopvektorát $\mathbf{a}_j$ jelöli, akkor $\mathbf{A}$ a következő alakba írható:

$$\mathbf{A} := \left[\; \mathbf{a}_1 \;\middle|\; \mathbf{a}_2 \;\middle|\; \dots \;\middle|\; \mathbf{a}_n \;\right], \text{ ahol } \mathbf{a}_j := \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

és $j = 1, \dots, n$. Hasonlóképpen

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \hline \mathbf{s}_2 \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{s}_m \end{bmatrix}, \text{ ahol } \mathbf{s}_i := \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix},$$

és $i = 1, \dots, m$.

M Az előző megjegyzésben alkalmazott függőleges, illetve vízszintes elválasztó vonalakat akkor használjuk, ha két vagy több mátrixból rakunk össze egyet. Használatuk nem kötelező, csak a megértést segítik. Például a (3)-beli kiegészített mátrixot a (2)-beli $\mathbf{A}$ és az egyenletrendszer b_j ($j = 1, 2, \dots, m$) konstansaiból képzett $\mathbf{b}$ vektorból képezzük, amit így jelölünk:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

A több mátrixból összerakott mátrixot szokás ***blokkmátrixnak*** is nevezni. Pl. az $\mathbf{A}_{n\times n}$, $\mathbf{B}_{n\times m}$, $\mathbf{C}_{m\times n}$, $\mathbf{D}_{m\times m}$ mátrixokból az alábbi $(n+m)\times(n+m)$-es blokkmátrixok képezhetők:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{D} & \mathbf{C} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{array}\right].$$

Egyenletrendszerek megoldása

D Azt mondjuk, hogy egy mátrix ***sorlépcsős*** alakú, ha

1. a csupa 0-ból álló sorok (a zérus sorok) a mátrix alsó sorai,
2. a nem-zérus sorok mindegyikének első nem 0 eleme 1, amit ***vezető egyes***nek vagy ***vezéregyes***nek nevezünk,
3. bármely két nem-zérus sor vezető egyese közül a felső soré balra helyezkedik el az alsó sor vezető egyesétől.

Ha ezeken túl még az is igaz, hogy a mátrixban

4. minden sor vezető egyesének oszlopában minden más elem 0,

akkor azt mondjuk, hogy a mátrix ***redukált sorlépcsős*** alakú.

P Az alábbi mátrixok sorlépcsős alakúak, az utolsó kettő ráadásul redukált sorlépcsős alakú:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 2 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 2 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & \mathbf{0} & 2 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 3 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & \mathbf{0} & 5 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}$$

T ***Sorlépcsős alakra hozás:*** Bármely mátrix elemi sorműveletekkel ***sorlépcsős*** alakra hozható.

Redukált sorlépcsős alakra hozás: Bármely mátrix elemi sorműveletekkel ***redukált sorlépcsős*** alakra hozható.

B Tekintsünk egy tetszőleges $m \times n$-es mátrixot, pl. a (2)-belit.

A következő eljárás egyes lépéseiben e mátrixnak le fogjuk takarni egy-egy sorát vagy oszlopát. Az egyszerűség kedvéért a letakarás után keletkezett mátrix sorainak és oszlopainak számát ismét m és n fogja jelölni, és a_{ij} a letakarások után maradt mátrix i-edik sorában lévő j-edik elemet.

1. Ha az első oszlopban csak 0 elemek állnak, takarjuk le ezt az oszlopot, és tekintsük a maradék mátrixot. Ha ennek első oszlopában ismét csak 0 elemek vannak, azt is takarjuk le, és ezt addig folytassuk, míg egy olyan oszlopot nem találunk, amelyben van nem 0 elem. Ha ilyen oszlopot nem találunk, az eljárásnak vége, a mátrix sorlépcsős alakú.

2. Ha az első oszlop első sorában álló elem 0, akkor cseréljük ki e sort egy olyannal, melynek első eleme nem 0. E lépésben tehát elértük, hogy $a_{11} \neq 0$.

3. Ha $a_{11} \neq 1$, akkor elosztjuk az első sort a_{11}-gyel, így az első sor első eleme 1 lesz. Ezután az 1 alatti együtthatókat a 2. sortól az m-edikig sorban haladva 0-ra változtatjuk: ha az i-edik sorbeli $a_{i1} \neq 0$, akkor az első sor $-a_{i1}$-szeresét hozzáadjuk az i-edik sorhoz.

4. A fenti átalakítás után takarjuk le az első sort és az első oszlopot. Ha ekkor nem marad a mátrixban több sor, vége az eljárásnak, a korábban letakart sorokat feltárva megkaptuk a sorlépcsős alakot. Egyébként ugorjunk vissza az 1. lépéshez, és folytassuk az eljárást.

Ha nem sorlépcsős alakra, hanem redukált sorlépcsős alakra akarunk jutni, akkor a sorlépcsős alak vezető egyesei fölötti értékeket is 0-ra változtatjuk a 3. lépésben leírt módon. Megmutatható, hogy a redukált sorlépcsős alak mindig egyértelmű, de könnyű olyan mátrixot konstruálni, mely különböző sorlépcsős alakokra transzformálható.

D Azt az eljárást, amikor a lineáris egyenletrendszer kiegészített mátrixát redukált sorlépcsős alakra hozzuk, ***Gauss–Jordan-módszer***nek, illetve ***Gauss–Jordan-elimináció***nak nevezzük. ***Gauss-módszer***ről, illetve ***Gauss-elimináció***ról akkor beszélünk, ha a kiegészített mátrixot sorlépcsős alakra hozzuk.

M ***A megoldás meghatározása:*** Az egyenletrendszer ***megoldhatósága*** könnyen leolvasható a kiegészített mátrixból annak ***sorlépcsős*** vagy ***redukált sorlépcsős*** alakra hozása után. Az egyenletrendszernek nincs megoldása, ha e mátrixnak van olyan sora, melyben az utolsó elem nem 0, de az összes többi igen, ennek ugyanis egy ellentmondó egyenlet felel meg. Ha ilyen sor a kiegészített mátrixban nincs, az egyenletrendszer megoldható. Az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, ha megoldható és a zérus sorokat elhagyva a mátrixból egy $n \times (n+1)$-es mátrixot kapunk. E mátrixban az i-edik sor vezető egyese szükségképpen az i-edik oszlopban van ($i = 1, 2, \dots n$). Ha a redukált alakban az utolsó oszlopon kívül más oszlop is akad, melyben nincs vezető egyes, és az egyenletrendszer megoldható, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Azokat a változókat, melyekhez tartozó oszlopokban van vezető egyes, kifejezhetjük azok segítségével, melyekhez tartozó oszlopban nincs vezető egyes. Az előbbieket szokás ***kötött változók***nak, míg az utóbbiakat ***szabad változók***nak nevezni. (Az, hogy melyik változó kötött és melyik szabad, megváltozhat, ha az egyenletrendszerben a változók sorrendjét fölcseréljük, viszont a számuk független e cserétől).

Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai azonnal leolvashatók a kiegészített mátrixból annak ***redukált sorlépcsős*** alakra hozása után. A ***sorlépcsős*** alakból is gyorsan meghatározható a megoldás a kötött változók kifejezésével és alulról kezdve mindegyiknek az előzőkbe helyettesítésével.

Az alábbi sorlépcsős alakra vezető egyenletrendszereknek rendre 0, 1, ill. végtelen sok megoldása van:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

P Oldjuk meg a 2. példabeli egyenletrendszert. A kibővített mátrixot elemi sorműveletekkel redukált sorlépcsős alakra hozzuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az utolsó mátrixot visszaírjuk egyenletrendszer alakra:

$$\begin{aligned} x + y \qquad &= 3 \\ + z &= 1 \end{aligned}$$

Kötött ismeretlenek x, z, szabad ismeretlen y. A megoldás tehát az $y = t$ paraméterválasztással:

$$\begin{aligned} x &= 3 - t \\ y &= t \\ z &= 1 \end{aligned}$$

azaz vektoralakba írva:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-t \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

P Vizsgáljuk meg az előző példabeli egyenletrendszer homogén változatát, azaz a jobb oldalon álló konstansokat cseréljük 0-ra. Ekkor az egyenletrendszer megoldásában a jobb oldali oszlopot szükségtelen kiírni, mivel az mindig nullákból áll. Ekkor tehát a megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Visszaírva egyenletrendszer alakra:

$$\begin{aligned} x + y \qquad &= 0 \\ + z &= 0 \end{aligned}$$

Kötött ismeretlenek x, z, szabad ismeretlen y. A megoldás tehát az $y = t$ paraméterválasztással vektoralakba írva:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figyeljük meg az előző példabeli inhomogén és e homogén egyenletrendszer megoldásai közti kapcsolatot!

9.P Oldjuk meg az egyetlen egyenletből álló $x + y + z = 0$ homogén lineáris egyenletrendszert!

Az együtthatómátrix $[1\ 1\ 1]$, ami már redukált sorlépcsős alakú! y és z a szabad, x a kötött változók. Legyen $y = t$, $z = s$, tehát az egyenletrendsszer megoldása:

$$\begin{aligned} x &= -t - s \\ y &= t \\ z &= s \end{aligned}$$

azaz vektoralakba írva:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Valójában nem tettünk mást, mint az $x + y + z = 0$ egyenletű sík vektorait előállítottuk két vektor lineáris kombinációiként. Könnyen látható, hogy e két vektor valóban benne van a síkban, és hogy lineáris kombinációik valóban kiadják a sík összes vektorát!

Szimultán egyenletrendszerek

10.D A több, azonos együtthatómátrixszal rendelkező egyenletrendszert ***szimultán egyenletrendszer***nek nevezzük. Tekintsük a k egyenletrendszerből álló, $\mathbf{A}_{m\times n}$ együtthatómátrixú szimultán egyenletrendszert. Az első egyenletrendszer jobb oldalán álló konstansok vektorát jelölje $\mathbf{b}_1$, az ismeretlenek vektorát $\mathbf{x}_1$, a másodikét $\mathbf{b}_2$, illetve $\mathbf{x}_2$,... a k-adikét $\mathbf{b}_k$, illetve $\mathbf{x}_k$. A szimultán egyenletrendszer kibővített mátrixa $[\ \mathbf{A} \mid \mathbf{B}\ ]$, ismeretleneinek mátrixa $\mathbf{X}$, ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [\ \mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \dots \mid \mathbf{x}_k\ ]_{n\times k}, \\ \mathbf{B} &= [\ \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \dots \mid \mathbf{b}_k\ ]_{m\times k}. \end{aligned}$$

M A szimultán egyenletrendszer is megoldható a Gauss-, illetve a Gauss–Jordan-módszerrel. Ekkor az elemi sorműveleteket az $[\ \mathbf{A} \mid \mathbf{B}\ ]$ mátrixon végezzük el.

P Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket, azaz a következő szimultán egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}, \text{ és az } \begin{aligned} u + v &= 5 \\ u - v &= 1 \end{aligned}$$

A szimultán egyenletrendszer kibővített mátrixán elvégezzük az elemi sorműveleteket:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

A megoldás a mátrix jobb feléből olvasható ki: az első egyenletrendszer megoldása $x = 1$, $y = 1$, míg a másodiké $u = 3$, $v = 2$.

Mátrixműveletek

Összeadás, szorzás

M A mátrixok összeadását és skalárral való szorzását úgy definiáljuk, hogy a vektorokra vonatkozó összefüggések érvényesek legyenek az $1 \times n$-es vagy $n \times 1$-es mátrixokra. A mátrixok szorzását úgy vezetjük be, hogy az (1) egyenletrendszer a (2)- és a (4)-beli jelölésekkel az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ szorzatalakot vehesse fel.

D Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$, $\mathbf{C} = [c_{jk}]_{n\times p}$. Az $\mathbf{A}$ ***transzponáltján***, c***-szeresén*** ($c \in \mathsf{R}$), $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ ***összegén***, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ ***szorzatán*** az alábbi mátrixokat értjük:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}^T = [a_{ij}]^T_{m\times n} := [a_{ji}]_{n\times m}\,,\\
&c\mathbf{A} = c\,[a_{ij}]_{m\times n} := [ca_{ij}]_{m\times n}\,, \quad -\mathbf{A} := (-1)\mathbf{A},\\
&\mathbf{A}+\mathbf{B} = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} := [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}\,,\\
&\mathbf{B}\mathbf{C} = [b_{ij}]_{m\times n}[c_{jk}]_{n\times p} = \left[\sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{jk}\right]_{m\times p}.
\end{aligned}$$

(Az utóbbi kifejezés azt jelenti, hogy a $\mathbf{BC}$ szorzatmátrix i-edik sorának és k-adik oszlopának kereszteződésében álló elem a $\mathbf{B}$ mátrix i-edik sorvektorának és a $\mathbf{C}$ mátrix k-adik oszlopvektorának skaláris szorzata. Egy $m \times n$ és egy $p \times q$ típusú mátrix csak akkor szorozható össze, ha $n = p$, és ekkor a szorzat típusa $m \times q$ méretű lesz.)

P Néhány példa a fenti műveletekre:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 6 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M Az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ skaláris szorzatát a vektorok szokásos oszlopmátrix alakú reprezentációja esetén az $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ mátrixszorzat állítja elő annyi különbséggel, hogy a skaláris szorzat egy szám, míg e mátrixszorzat eredménye egy 1×1-es mátrix. Az $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$ szorzatot ***diadikus szorzat***nak is szokás nevezni, a művelet jele $\circ$:

$$\mathbf{x}\circ\mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 \dots x_1y_n \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_ny_1 \dots x_ny_n \end{bmatrix}$$

M A lineáris egyenletrendszerek ún. ***mátrixszorzatos alak***ba írhatók. Például az (1) egyenletrendszer a (2)- és a (4)-beli jelölésekkel az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakba írható. A mátrixok típusait is jelölve: $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbf{b}_{m\times 1}$. Hasonlóképp a 10. definícióbeli szimultán egyenletrendszer felírható $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ alakba!

11.M Legyen az $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix oszlop-, illetve sorvektorokra felbontott alakja a 8.M szerinti, a $\mathbf{B}_{n\times k}$ mátrix sor-, illetve oszlopvektorokra bontott alakja pedig legyen

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{r}_n \end{array}\right].$$

Ekkor az $\mathbf{AB}$ mátrixszorzat sor-, illetve oszlopvektorokra felbontott alakjai a következők:

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \mathbf{A}\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{A}\mathbf{b}_k \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c} \mathbf{s}_1 \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{s}_m \end{array}\right] \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{s}_1\mathbf{B} \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{s}_m\mathbf{B} \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Ebből az is kiolvasható, hogy az $\mathbf{AB}$ mátrix j-edik oszlopa, azaz az $\mathbf{A}\mathbf{b}_j$ vektor az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopainak a $\mathbf{b}_j$ vektor koordinátáival vett lineáris kombinációja. Hasonlóképp az $\mathbf{AB}$ mátrix i-edik sora, azaz az $\mathbf{s}_i\mathbf{B}$ sorvektor a $\mathbf{B}$ sorvektorainak lineáris kombinációja.

M Az $\mathbf{AB}$ szorzat vektorok diadikus szorzatainak összegeként is előállítható, nevezetesen az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai és a $\mathbf{B}$ sorvektorai szorzatainak összegeként:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{a}_1\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{a}_n\mathbf{r}_n.$$

(Az utóbbi kifejezésben $\mathbf{a}_i$ oszlopvektor, $\mathbf{r}_i$ sorvektor, így szorzatuk valóban diadikus szorzat: $\mathbf{a}_i\mathbf{r}_i = \mathbf{a}_i \circ \mathbf{r}_i^T$.)

P Példaként előállítjuk az $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixszorzatot diadikus szorzatok összegeként:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

E felbontás érvényessége könnyen ellenőrizhető, itt most csak 2×2-esre mutatjuk meg:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
&\quad = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\
&\quad = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \\
&\quad = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

M Az egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjából az is látszik, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor ***oldható meg***, ha a $\mathbf{b}$ vektor előáll az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, ugyanis

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = \left[\ \mathbf{a}_1 \ \middle|\ \dots\ \middle|\ \mathbf{a}_n\ \right] \mathbf{x} = \mathbf{a}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n.$$

A megoldás épp e lineáris kombináció konstansainak megkeresését jelenti.

D A csupa zéruselemből álló $\mathbf{O}$ mátrixot ***zérusmátrix***nak nevezzük. ***Egységmátrix*** az a négyzetes – azaz $n \times n$ típusú – $\mathbf{I}$, ill. $\mathbf{I}_n$ mátrix, melynek főátlójában csupa 1 áll, a többi helyen csupa 0. A csupa 1-esből álló $\mathbf{J}$ mátrixot ***csupa-1-mátrix***nak nevezzük.

T ***Műveleti azonosságok:*** Az alábbi azonosságok úgy értendők, hogy ha az egyenlőségjel bal oldalán álló művelet elvégezhető, akkor a jobb oldalán álló is, és a két kifejezés egyenlő. ($\mathbf{O}$ a megfelelő méretű zérusmátrixot, $\mathbf{I}$ az egységmátrixot jelöli.)

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}, \\
&\mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}, \\
&\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}, \\
&\mathbf{IA} = \mathbf{A},\ \mathbf{AI} = \mathbf{A}, \\
&\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}, \\
&\mathbf{A}(c\mathbf{B}) = (c\mathbf{A})\mathbf{B} = c(\mathbf{AB}), \quad 0\mathbf{A} = \mathbf{O} \\
&c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}, \quad (c + d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}, \\
&(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}, \quad (c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T, \\
&(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T
\end{aligned}
$$

K ***Vektor mátrixszal való szorzásának linearitása:*** Legyen $\mathbf{A}$ $m \times n$-es mátrix, és legyen $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ két tetszőleges $\mathbf{R}^n$-beli vektor, ekkor fönnáll az alábbi két összefüggés:

1. $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c(\mathbf{Ax})$
2. $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay}$.

K ***A lineáris kombináció megtartása:*** Legyen $\mathbf{A}$ $m \times n$-es mátrix, és legyenek $\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_k$ tetszőleges $\mathbf{R}^n$-beli vektorok. Ekkor bármely $c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$ számokkal fönnáll az alábbi összefüggés:

$$\mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1\mathbf{Ax}_1 + \cdots + c_k\mathbf{Ax}_k.$$

Inverz

D Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix ***invertálható***, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, hogy $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, ahol $\mathbf{I}$ az $n \times n$-es egységmátrix. Az $\mathbf{A}$ mátrix ***inverz***ét $\mathbf{A}^{-1}$ jelöli. A nem invertálható mátrixot ***szinguláris***nak nevezzük.

M Világos, hogy ha $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, akkor $\mathbf{B}$ inverze $\mathbf{A}$.

12.T Ha a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixhoz létezik olyan ugyancsak négyzetes $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{AB} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Ennek következménye, hogy egy mátrixnak legföljebb csak egy inverze lehet.

B $\mathbf{C} = \mathbf{CI} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B}$.

13.T A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha elemi sorműveletekkel az azonos méretű $\mathbf{I}$ egységmátrixba alakítható. Azok a sorműveletek, melyek $\mathbf{A}$-t $\mathbf{I}$-be viszik, az $\mathbf{I}$-t $\mathbf{A}^{-1}$-be transzformálják.

B Az $\mathbf{A}$ sorainak, ill. oszlopainak számát jelölje n. Tekintsük azt az n egyenletrendszerből álló szimultán egyenletrendszert, melynek együtthatómátrixa $\mathbf{A}$, jobb oldalán pedig az egységmátrix áll. Ennek megoldása az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldásával ekvivalens. Ezt úgy végezzük, hogy a szimultán egyenletrendszer kibővített mátrixát, azaz az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrixot redukált sorlépcsős alakra hozzuk. Megmutatjuk, hogyha ez $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakú, akkor $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ inverze. Mivel $\mathbf{B}$ az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenlet megoldása, ezért $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ fennáll. Meg kell még mutatnunk, hogy a $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlőség is igaz. Ehhez tekintsük a szimultán $\mathbf{BY} = \mathbf{I}$ egyenletet. Ennek megoldásához a $[\mathbf{B}|\mathbf{I}]$ mátrixot kell sorlépcsős alakra hozni. Ez biztosan lehetséges, hisz ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \sim \cdots \sim [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ átalakítás lépéseit fordított sorrendben végezzük el az $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ helyett a két részmátrix fölcserélésével kapott $[\mathbf{B}|\mathbf{I}]$ mátrixon, akkor az $[\mathbf{I}|\mathbf{A}]$ mátrixot kell kapnunk, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{Y} = \mathbf{A}$ a megoldás, azaz $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

Meg kell még mutatnunk, hogy ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrix redukált sorlépcsős alakjában a bal oldal nem az egységmátrix, akkor az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenletnek nincs megoldása. Ha a sorlépcsős alaknak van olyan sora, amely a bal oldalon csupa 0-ból áll, de a jobb oldalon van nem-0 elem is, akkor a szimultán egyenletrendszernek nincs megoldása. Az az eset pedig, hogy végtelen sok megoldása legyen, azaz hogy a sorlépcsős alaknak legyen 0-sora, nem fordulhat elő, hisz ha $\mathbf{A}$-nak van inverze, azaz ha $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ megoldható, akkor csak egyetlen megoldása van, mint azt az előző tételben beláttuk.

T Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha $ad - bc \neq 0$, azaz ha a $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right|$ determináns nem 0, és ekkor

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

B Azt, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak valóban a fenti mátrix az inverze, egyszerű mátrixszorzással ellenőrizhetjük. Azt, hogy az $ad - bc \neq 0$ feltétel az invertálhatóságnak elégséges feltétele, a képlet bizonyítja. Azt, hogy szükséges feltétele is, úgy lehet bizonyítani, ha észrevesszük, hogy $ad - bc = 0$, azaz $ad = bc$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A}$ egyik sora a másik skalárszorosa. Ekkor ugyanis az egyik sor kinullázható, vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix nem alakítható elemi sorműveletekkel az egységmátrixba.

P Elemi sorműveletekkel kiszámítjuk egy mátrix inverzét (kicseréljük az első és harmadik sort ($S_1 \leftrightarrow S_3$), a harmadikhoz adjuk az első -2-szeresét ($-2S_1 \rightarrow S_3$), a második és harmadik sor cseréje után a második -5-szörösét a harmadikhoz adjuk ($S_2 \leftrightarrow S_3$, $-5S_2 \rightarrow S_3$), a harmadik sor -3-szorosát az elsőhöz adjuk ($-3S_3 \rightarrow S_1$), a második sor -2-szeresét az elsőhöz adjuk ($-2S_2 \rightarrow S_1$)):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 10 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 15 & -3 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 13 & -3 & -25 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 13 & -3 & -25 \\ 1 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 10 \end{bmatrix}.$$

T ***Az inverz algebrai tulajdonságai:*** Legyen $\mathbf{A}$ invertálható, ekkor

1. $\mathbf{A}^{-1}$ is invertálható, és $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
2. nemnegatív egész n esetén $\mathbf{A}^n$ is invertálható, és $(\mathbf{A}^n)^{-1} = \mathbf{A}^{-n} = (\mathbf{A}^{-1})^n$.
3. tetszőleges $c \neq 0$ konstansra $(c\mathbf{A})^{-1} = c^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.
4. ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ azonos méretű invertálható mátrixok, akkor szorzatuk is invertálható, és
$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

T Ha $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\mathbf{A}$ invertálható, és ekkor a megoldás $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Hasonlóképp a szimultán $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\mathbf{A}$ invertálható, és ekkor a megoldás $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Műveletek speciális alakú mátrixokkal

T Diagonális és háromszög alakú mátrixok

1. Diagonális mátrixok összege, skalárszorosa, szorzata, inverze diagonális.
2. Felső háromszögmátrixok összege, skalárszorosa, szorzata, inverze felső háromszögmátrix.
3. Felső háromszögmátrix (s így a diagonális mátrix is) pontosan akkor invertálható, ha főátlójában egyik elem sem zérus.
4. Diagonális mátrix pozitív egészkitevős hatványára a következő összefüggés áll fenn:
$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n^k \end{bmatrix}$$
Az összefüggés negatív k-ra is fennáll, ha a mátrix invertálható, azaz ha egyik főátlóbeli eleme sem 0.

M A definíció alapján nyilvánvaló, hogy a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor szimmetrikus, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, és pontosan akkor ferdén szimmetrikus, ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

T Szimmetrikus mátrixok szorzata pontosan akkor szimmetrikus, ha a mátrixok felcserélhetők.

B Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ és $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$, akkor $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{BA}$, így $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{AB}$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

T Minden négyzetes mátrix felbontható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegére, nevezetesen

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

B $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ szimmetrikus, mert $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T + (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$, így $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ is szimmetrikus. Hasonlóan bizonyítható, hogy $\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$ ferdén szimmetrikus, összegük pedig nyilván $\mathbf{A}$.

M A blokkmátrixok közti összeadás és szorzás műveletek úgy végezhetők, mintha a blokkok helyén számok állnának. Például ha $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ rendre 2×2, 2×1, 1×2, 1×1 méretűek, és hasonlóképp az $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{C}'$ és $\mathbf{D}'$, akkor

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \hline \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{AA}' + \mathbf{BC}' & \mathbf{AB}' + \mathbf{BD}' \\ \hline \mathbf{CA}' + \mathbf{DC}' & \mathbf{CB}' + \mathbf{DD}' \end{array}\right]$$

M Egy négyzetes blokkmátrixot ***blokkdiagonális***nak nevezünk, ha a főátlójában négyzetes mátrixok vannak, a többi nullmátrix. Ha egy blokkdiagonális mátrix főátlójában lévő mátrixok nem szingulárisak, akkor a mátrix invertálható:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^{-1} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{R}^n$ tér alterei

Az altér fogalma

14.D Azt mondjuk, hogy az $L \subseteq \mathbf{R}^n$ nem üres vektorhalmaz az $\mathbf{R}^n$ vektortér ***lineáris altere***, vagy egyszerűen ***altere***, ha L-ből bárhogy kiválasztva véges sok $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ vektort, azok minden lineáris kombinációja is L-ben lesz.

M Könnyen látható, hogy a nem üres L vektorhalmaz pontosan akkor lineáris altér, ha tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ vektor és tetszőleges $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ valós szám esetén $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \in L$. E feltétellel ekvivalens az alábbi kettő:

1. tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ vektorok esetén $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in L$,
2. tetszőleges $\mathbf{a} \in L$ vektor és $c \in \mathbf{R}$ valós szám esetén $c\mathbf{a} \in L$.

P a. A zérusvektorból álló $L = \{\mathbf{0}\}$ halmaz és az $L = \mathbf{R}^n$ halmaz egyaránt alterek. Ezeket ***triviális alterek***nek nevezzük.

b. Az $\mathbf{R}^2$ nemtriviális alterei azok a vektorhalmazok, amelyekben a vektorok végpontjai egy origón átmenő egyenesen vannak. Ilyen altérhez úgy jutunk, ha vesszük egy nem-0-vektor összes skalárszorosát. $\mathbf{R}^3$ nemtriviális alterei olyan vektorokból állnak, melyek végpontjai vagy egy origón áthaladó egyenesen, vagy egy origón áthaladó síkon vannak.

Képtér, magtér

15.D Legyen $\mathbf{A}_{m\times n}$ egy valós elemű mátrix. Tekintsük a következő $T_\mathbf{A}$ függvényt:

$$T_\mathbf{A} \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Ezt a $T_\mathbf{A}$ függvényt az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó leképezésnek nevezzük. E leképezés értelmezési tartománya $\mathbf{R}^n$, értékkészlete pedig $\mathbf{R}^m$ része, melyet szokás $T_\mathbf{A}$ ***képter***ének is nevezni. A $T_\mathbf{A}$ által a $\mathbf{0}$ vektorba képezett vektorok halmazát a $T_\mathbf{A}$ leképezés ***magter***ének nevezzük. Az $\mathbf{A}$ mátrix magterén és képterén a hozzá tartozó $T_\mathbf{A}$ leképezés magterét és képterét értjük.

M Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ az $\mathbf{A}$ képterében van. A homogén lineáris $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásai az $\mathbf{A}$ magterét alkotják.

16.T Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak minden lineáris kombinációja megoldás, azaz másként fogalmazva az $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbf{0}_{m\times 1}$ egyenletrendszer megoldásai az $\mathbf{R}^n$ tér egy lineáris alterét alkotják, vagyis a magtér az $\mathbf{R}^n$ altere.

B A magtér nem üres, hisz a 0-vektor benne van. Másrészt, ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ megoldás, azaz $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x} + c_2\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

17.T Az $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix képtere az $\mathbf{R}^m$ egy lineáris altere. Másként fogalmazva: azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, alteret alkotnak $\mathbf{R}^m$-ben.

B Legyen $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ a képtér két tetszőleges vektora, azaz létezik olyan $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektor, hogy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ és $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}_2$. Legyen $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ két tetszőleges szám. Ekkor $\mathbf{A}(c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x} + c_2\mathbf{A}\mathbf{y} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2$, tehát $c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2$ is $\mathbf{A}$ képterében van. Nyilvánvaló, hogy a képtér nem üres, hisz az értelmezési tartomány minden vektorának van képe. Tehát a képtér $\mathbf{R}^m$ altere.

A megoldások terei

18.T Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer összes megoldását megkapjuk, ha egyetlen megoldásához hozzáadjuk a homogén $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer összes megoldását.

B Először megmutatjuk, hogy ha az inhomogén egyenletrendszer egy megoldásához hozzáadjuk a homogén bármelyik megoldását, az inhomogén egy megoldását kapjuk. Legyen $\mathbf{x}_0$ az inhomogén, $\mathbf{y}$ a homogén egy tetszőleges megoldása, akkor $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$ az inhomogén egy megoldását adja, ugyanis $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$.

Ezután megmutatjuk, hogy ha $\mathbf{x}_0$ az inhomogén egy rögzített megoldása, $\mathbf{x}_1$ pedig egy tetszőleges megoldása, akkor létezik olyan $\mathbf{y}$ megoldása a homogén egyenletrendszernek, melyre $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$. Nem meglepő módon legyen $\mathbf{y} := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$. Meg kell mutatnunk, hogy $\mathbf{y}$ megoldása a homogén egyenletrendszernek. Mivel $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ az inhomogén egyenletrendszer megoldásai, azaz $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ és $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}$, ezért $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, tehát az $\mathbf{y}$ vektor megoldása a homogén egyenletrendszernek.

M Összefoglalva: Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldása alteret alkot. Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer összes megoldása nem alkot alteret, ha $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, viszont egy altér eltoltja. Ez az altér épp az egyenletrendszerhez tartozó $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásainak altere. Eszerint a kétismeretlenes $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásainak vektorhalmaza $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ esetén vagy üres, vagy a sík egy origótól különböző vektorából, vagy egy origón nem áthaladó egyenes pontjaiba mutató vektorokból áll.

Bázis, dimenzió

D Tekintsük az $\mathbf{R}^n$ tér egy L alterét, és annak $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in L$ vektorait. Tudjuk, hogy e vektorok összes lineáris kombinációja alteret alkot. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok ***kifeszítik*** az L alteret, ha összes lineáris kombinációjuk altere megegyezik L-lel.

D Legyen adva az $\mathbf{R}^n$ valamely L alterében egy $B = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ vektorrendszer. Azt mondjuk, hogy B ***bázis*** L-ben, ha B elemei lineárisan függetlenek, és kifeszítik L-et.

P Példák bázisra:

1. Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$,... $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$, vektorok bázist alkotnak $\mathbf{R}^n$-ben. Ezt nevezzük $\mathbf{R}^n$ ***standard bázis***ának.

2. A 9. példabeli $x+y+z=0$ egyenletből álló egyenletrendszer megoldásai terének a $(-1,1,0)$ és a $(-1,0,1)$ vektorok bázisát alkotják. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy az $x+y+z=0$ egyenletű sík vektorainak terét e két vektor kifeszíti.
3. Az $\mathbf{R}^2$ sík $3x-4y=0$ egyenletű egyenesének vektorai alteret alkotnak $\mathbf{R}^2$-ben. Ennek egy bázisa a $(4,3)$ vektorból álló vektorrendszer.

T $\mathbf{R}^n$ egy L alterének bármely két bázisa azonos számú vektorból áll.

D Az L altér ***dimenzió***ján valamely bázisának elemszámát értjük. Az L dimenzióját $\dim(L)$ jelöli.

T 1. Ha L n-dimenziós, és $B=\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\}$ lineárisan független L-beli vektorokból áll, akkor B bázis L-ben.
2. Ha L n-dimenziós, és $B=\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\}$ kifeszíti V-t, akkor B bázis.

Sortér, oszloptér, rang

D Az $m\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix n-dimenziós sorvektorai által kifeszített teret az $\mathbf{A}$ ***sorter***ének, míg az m-dimenziós oszlopvektorok által kifeszített teret $\mathbf{A}$ ***oszlopter***ének nevezzük.

19.T a. Elemi sorműveletek közben a sortér nem változik.
b. Egy mátrix sorlépcsőssé transzformált alakjának nemzérus vektorai a sortér egy bázisát adják.

20.T a. Elemi sorműveletek közben az oszlopvektorok közötti lineáris összefüggőségek nem változnak.
b. Egy mátrixnak azok az oszlopai, amelyekbe a sorlépcsős alakra hozás közben vezető egyes kerül, az oszlopvektorok egy maximális lineárisan független rendszerét adják, azaz e vektorok kifeszítik az oszlopteret.

P *a)* Tekintsük az $(1,1,1,4)$, $(1,1,-1,2)$, $(2,2,0,6)$, $(0,0,2,2)$ vektorokat. Határozzuk meg egy bázisát az általuk kifeszített altérnek!

b) Tekintsük az $(1,1,2,0)$, $(1,1,2,0)$, $(1,-1,0,2)$, $(4,2,6,2)$ vektorokat! Válasszunk ki e vektorok közül egy maximális lineárisan független rendszert!

Mindkét feladat egyetlen mátrix sorlépcsős alakra hozásával megoldható, hisz ugyanannak a mátrixnak az *a)*-beli vektorok sorvektorai, a *b)*-beli vektorok oszlopvektorai.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az előző két tétel szerint tehát az *a)*-beli vektorok által kifeszített tér egy bázisa $(1,1,0,3)$, $(0,0,1,1)$; a *b)*-beli vektorok közt az első és harmadik vektor maximális független rendszert alkot!

T Egy mátrix sorterének és oszlopterének dimenziója mindig megegyezik.

D Egy ***vektorrendszer rangján*** a vektorok által kifeszített altér dimenzióját értjük, míg egy ***mátrix rangján*** a sorvektorai által kifeszített tér, vagyis a sortér dimenzióját. Egy $\mathbf{A}$ mátrix rangját $\operatorname{rang}(\mathbf{A})$, míg az $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m\}$ vektorrendszer rangját $\operatorname{rang}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)$ jelöli.

21.T Legyen $\mathbf{A}_{m\times n}$ egy tetszőleges mátrix, az általa generált leképezést jelölje $T_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}$ sorvektorainak rendszerét jelölje S, oszlopvektorainak rendszerét O. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\operatorname{rang}(S)=r$;
2. $\operatorname{rang}(O)=r$;
3. $\operatorname{rang}(\mathbf{A})=r$;
4. az S-ből kiválasztható lineárisan független vektorok számának maximuma r;
5. az O-ból kiválasztható lineárisan független vektorok számának maximuma r;
6. $\mathbf{A}$ sorterének dimenziója r;
7. $\mathbf{A}$ oszlopterének dimenziója r;
8. $T_{\mathbf{A}}$ képterének dimenziója r;

22.T Egyenletrendszer megoldhatósága és az oszloptér:

a) Az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a $\mathbf{b}$ vektor benne van az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopterében.

b) Az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{A}$ és $\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{array}\right]$ oszloptere azonos.

c) Az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\operatorname{rang}(\mathbf{A})=\operatorname{rang}(\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{array}\right])$.

d) Az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg ***egyértelműen***, ha $\operatorname{rang}(\mathbf{A})=\operatorname{rang}(\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{array}\right])=n$, ahol n az ismeretlenek száma.

e) A homogén $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ egyenletrendszer mindig megoldható, hisz mindig megoldás az $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, azaz a triviális megoldás. E homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van nem-triviális megoldása, ha $\operatorname{rang}(\mathbf{A})<n$ (n az ismeretlenek száma).

B Az *a)* abból következik, hogy $\mathbf{Ax}$ az oszlopainak egy lineáris kombinációja. *b)* ekvivalens *a)*-val, *c)* és *d)* a redukált sorlépcsős alakra hozás következménye. *e)* a *d)* következménye.

23.T Ha $\mathbf{A}$ egy $m\times n$-es mátrix, rangja k, akkor

1. $T_{\mathbf{A}}$ magterének dimenziója $n-k$,
2. $\mathbf{A}$ sorlépcsős alakjában k nemzérus sor és $m-k$ zérus sor van,
3. $\mathbf{A}$ sorlépcsős alakjában k vezető 1-es van,
4. az $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásában k kötött és $n-k$ szabad változó van.

K Ha $\mathbf{A}$ egy $m\times n$-es mátrix, tehát $T_{\mathbf{A}}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, akkor $T_{\mathbf{A}}$ magtere és képtere dimenziójának összege n.

Mátrixokon értelmezett függvények

A determináns fogalma és tulajdonságai

M A 2×2-es, illetve a 3×3-as determináns értéke megegyezik a sorvektorai által kifeszített paralelogramma előjeles területével, illetve paralelepipedon előjeles térfogatával. Az előjeles térfogat 4 fontos tulajdonságát felhasználva általánosítjuk e fogalmat.

24.D Az $\mathbf{R}^n$ standard bázisának elemeit jelölje $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Legyenek $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_n \in \mathbf{R}^n$ tetszőleges vektorok. E vektorok által kifeszített paralelepipedon ***előjeles térfogatán*** egy olyan n-dimenziós vektor-n-eseken értelmezett valós értékű V függvényt értünk, melyre

(1) $V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$ (az egységkocka térfogata 1);

(2) $V(\mathbf{a}_1, \ldots, c\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n) = cV(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n)$;

(3) $V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i^*, \ldots, \mathbf{a}_n) + V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i^{**}, \ldots, \mathbf{a}_n) = V(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i^* + \mathbf{a}_i^{**}, \ldots, \mathbf{a}_n)$;

(4) $V(\ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots) = -V(\ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots)$.

T Egyetlen olyan függvény van, mely a fenti tulajdonságokat teljesíti.

D Egy $n \times n$-es mátrix ***determinánsán*** a sorvektorai által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatát értjük. Jelölése:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D Tekintsük a négyzetes $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ mátrixot! Az a_{ij} elemhez tartozó aldeterminánson az i-edik sor és a j-edik oszlop elhagyásával kapott $(n-1)\times(n-1)$-es mátrix determinánsát értjük. Jelölje A_{ij} az a_{ij}-hez tartozó aldetermináns $(-1)^{i+j}$-szeresét, amit az a_{ij}-hez tartozó ***előjeles aldeterminánsnak*** nevezünk.

M A következőkben összefoglaljuk a determinánsok tulajdonságait, köztük megismételjük azokat, melyeket a 24.D definícióban adtunk meg, és azokat is, melyek ezekből levezethetők.

25.T ***A determináns tulajdonságai:*** A továbbiakban n jelöli a determináns sorainak számát, $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ is egy-egy $n \times n$-es mátrixot jelöl.

A. A determináns és az elemi sorműveletek

1. Ha a determináns két sorát felcseréljük, értéke -1-szeresére változik (24.D (4)).
2. Ha egy sor helyébe annak konstansszorosát írjuk, a determináns értéke is ugyanannyiszorosára változik (24.D (2)).
3. Ha a determináns egyik sorához egy másik sorának konstansszorosát adjuk, értéke nem változik.

B. Determináns sorai és oszlopai

1. Ha a determinánst főátlóján tükrözzük, értéke nem változik, azaz $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.
2. A determináns sorain végzett elemi átalakítások azonos szabályok mellett az oszlopokon is elvégezhetők.

C. Speciális alakú determinánsok értékének kiszámítása

1. Az egységmátrix determinánsa 1 (24.D (1)).
2. Ha a főátló alatt csupa zérus áll, akkor a determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzata.
3. Ha egy determinánsnak minden sorában és oszlopában pontosan egy nemnulla eleme van, akkor értéke megegyezik ezeknek az elemeknek a szorzatával, vagy annak ellentettjével attól függően, hogy e determináns páros vagy páratlan számú sorcserével hozható diagonális alakra.

D. Determináns felbontása

1. Ha az i-edik sorban csupa kéttagú összeg szerepel, akkor a determináns egyenlő annak a két determinánsnak az összegével, amelyek i-edik sorában e kéttagú összegek első, illetve második tagja áll, minden más soruk pedig megegyezik az eredeti determinánséval (24.D (3)).
2. Tekintsük azokat a determinánsokat, melyeket úgy kapunk az eredetiből, hogy kiválasztunk n elemet, melyek közül semelyik kettő sincs egy sorban vagy oszlopban, a többit pedig 0-val helyettesítjük. Minden determináns felbomlik az összes ilyen módon kreált determináns összegére.
3. Lényegében az előzővel azonos tartalmú az alábbi felbontás: tekintsük a determináns elemeiből képzett összes olyan $a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}$ szorzatot, ahol $i_1, i_2, \ldots, i_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja. Szorozzuk meg e szorzatot -1-gyel, ha az $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ permutáció az $1, 2, \ldots, n$-ből páratlan sok elempár cseréjével kapható meg. Az így kapott szorzatok összege megegyezik a determináns értékével.
4. ***Kifejtési tétel:*** A determináns értéke bármely sora vagy oszlopa szerint „kifejtve” meghatározható:
$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \end{aligned}$$
ahol $i, j = 1, 2, \ldots, n$, és A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldetermináns.
5. ***Ferde kifejtési tétel:*** Ha egy determináns egy sorának (oszlopának) minden elemét egy másik sor (oszlop) elemeihez tartozó előjeles aldeterminánssal szorozzuk meg, és ezeket adjuk össze, 0-t kapunk eredményül:
$$\begin{aligned} a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0, \\ a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0. \end{aligned}$$
ahol $k \neq i$, illetve $k \neq j$.

E. Determináns értékének zérus volta

1. Ha a determináns egyik sorának minden eleme zérus, akkor a determináns értéke is zérus.
2. Ha a determináns egyik sora a másiknak konstansszorosa, akkor a determináns értéke zérus.
3. A determináns értéke pontosan akkor zérus, ha sorvektorai lineárisan összefüggőek.

F. További algebrai tulajdonságok

1. $\det(k\mathbf{A}) = k^n \det(\mathbf{A})$, ($k \in \mathbf{R}$),
2. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$,
3. $\det(\mathbf{A}^m) = (\det(\mathbf{A}))^m$, ($m \in \mathbf{N}$),
4. Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$.

P ***Vandermonde-determináns:*** A $v_1, v_2, \ldots v_n$ számokból képzett $n \times n$-es Vandermonde-determinánson azt a determinánst értjük, melynek oszlopaiban e számok hatványai vannak 0-tól $n-1$-ig. E determináns és értéke:

$$\begin{vmatrix} 1 & v_1 & v_1^2 & \ldots & v_1^{n-1} \\ 1 & v_2 & v_2^2 & \ldots & v_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & v_n & v_n^2 & \ldots & v_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (v_j - v_i)$$

A Vandermonde-determináns értékének kiszámítását egy 3×3-as determinánson mutatjuk be. A módszer $n \times n$-esre hasonlóan megy. Először vonjuk ki az utolsó oszlopból az utolsó előtti v_1-szeresét, majd az utolsó előtti oszlopból az azt megelőző v_1-szeresét, stb. Ezután kifejtjük az első sora szerint. Az így kapott kisebb méretű determináns első sorából kiemeljük a $v_2 - v_1$, második sorából a $v_3 - v_1, \ldots$ kifejezéseket. Amit kapunk, az ismét egy Vandermonde-determináns. Ugyanígy folytatjuk.

$$\begin{vmatrix} 1 & v_1 & v_1^2 \\ 1 & v_2 & v_2^2 \\ 1 & v_3 & v_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & v_1 & 0 \\ 1 & v_2 & v_2^2 - v_1 v_2 \\ 1 & v_3 & v_3^2 - v_1 v_3 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & v_2 - v_1 & v_2^2 - v_1 v_2 \\ 1 & v_3 - v_1 & v_3^2 - v_1 v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 - v_1 & v_2^2 - v_1 v_2 \\ v_3 - v_1 & v_3^2 - v_1 v_3 \end{vmatrix}$$
$$= (v_2 - v_1)(v_3 - v_1) \begin{vmatrix} 1 & v_2 \\ 1 & v_3 \end{vmatrix}$$
$$= (v_2 - v_1)(v_3 - v_1)(v_3 - v_2).$$

T Egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha determinánsa nem 0. Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}[A_{ij}]^T$$

vagyis az inverz az A_{ij} előjeles aldeterminánsokból képzett mátrix transzponáltjának a determináns reciprokával vett szorzata.

B A tétel egyszerű következménye a determinánsok tulajdonságai közt felsorolt kifejtési tételnek. Szorozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrixot a fenti kifejezéssel:

$$\mathbf{A} \cdot \frac{1}{\det(\mathbf{A})}[A_{ij}]^T = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}[a_{ij}][A_{ij}]^T$$

Az $[a_{ij}]$ mátrix i-edik sorának és az $[A_{ij}]^T$ mátrix j-edik oszlopának skalárszorzata $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}$, ami $i = j$ esetén $\det(\mathbf{A})$, egyébként 0, és épp ezt akartuk bizonyítani.

26.K Legyen az $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van nem-triviális megoldása, ha $\det(\mathbf{A}) = 0$ (ugyanis rangja ekkor kisebb, mint az oszlopainak száma).

Cramer-szabály

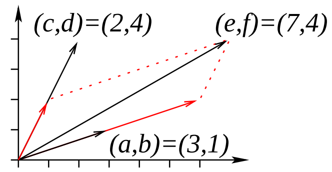
M Tekintsük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} ax + cy &= e \\ bx + dy &= f \end{aligned}$$

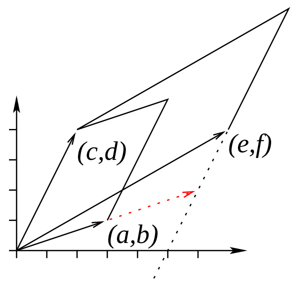
Ez ekvivalens az $(a, b)x + (c, d)y = (e, f)$ vektoregyenlettel. Az egyenletrendszernek a megoldása tehát annak a kérdésnek a megválaszolásával ekvivalens, hogy az (a, b) és (c, d) melyik lineáris kombinációja egyenlő az (e, f) vektorral. Tekintsük az alábbi ábrát, mely konkrétan a

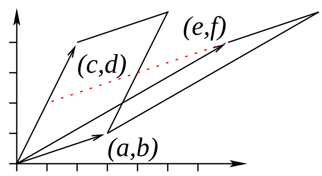
$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ x + 4y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert szemlélteti, ahol $(a, b) = (3, 1)$, $(c, d) = (2, 4)$ és $(e, f) = (7, 4)$.



Könnyen ellenőrizhető, hogy $x = 2$ és $y = \frac{1}{2}$ a megoldás. Ez megkapható a következő módon: az (e, f) vektor csúcsában párhuzamost húzunk a (c, d) vektor egyenesével. Ez az (a, b) vektor egyenesét olyan pontban metszi, hogy az ide mutató vektor épp az (a, b) irányú összetevő. Az ábráról leolvasható, hogy e vektornak az (a, b) vektorral való aránya (azaz a megoldás x-értéke), megegyezik az (e, f) és (c, d) által kifeszített paralelogramma és az (a, b) és (c, d) által kifeszített paralelogramma területeinek arányával. Hasonlóképpen kapható meg az y értéke is:





Az előjeles területeket determinánssal felírva tehát azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} \text{ és } y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}.$$

Ennek általánosítása többismeretlenes egyenletrendszerekre a következő:

27.T ***Cramer-szabály:*** Ha az n-ismeretlenes $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer n egyenletből áll, azaz $\mathbf{A}$ $n \times n$-es, és $\mathbf{B}_i$ jelöli azt a mátrixot, melyet $\mathbf{A}$-ból úgy kapunk, hogy i-edik oszlopvektorát kicseréljük a $\mathbf{b}$ vektorra, akkor az egyenletrendszer megoldása

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{B}_1)}{\det(\mathbf{A})}, x_2 = \frac{\det(\mathbf{B}_2)}{\det(\mathbf{A})}, \dots\ x_n = \frac{\det(\mathbf{B}_n)}{\det(\mathbf{A})}.$$

B Mivel

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

ezért

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n}{\det(\mathbf{A})},$$

a számlálóban pedig épp $\mathbf{B}_i$ determinánsa szerepel az i-edik oszlopa szerinti kifejtésben.

Nyom

D A négyzetes $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ mátrix ***nyom***án főátlója elemeinek összegét értjük. A nyom, mint függvény jele tr. Tehát $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

T ***A nyom tulajdonságai:*** Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ $n \times n$-es mátrixok, akkor

1. $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$
2. $\mathrm{tr}(c\mathbf{A}) = c\,\mathrm{tr}(\mathbf{A})$
3. $\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$
4. $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$

Mátrixpolinomok

M Mátrixhoz mátrixot rendelő függvények szoros kapcsolatba hozhatók a valós függvényekkel. A legegyszerűbb példa a mátrixpolinomé, amelynek definiálása magától értetődő, hisz négyzetes mátrix nemnegatív egész kitevős hatványa, skalárszorosa és összege is definiálva van.

T Ha $\mathbf{A}$ olyan négyzetes mátrix, melynek valamely m-edik hatványára $\mathbf{A}^m = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ invertálható, és

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{m-1}.$$

T Ha $\mathbf{A}$ olyan négyzetes mátrix, melyben az elemek abszolút értékének összege minden oszlopban (vagy sorban) kisebb, mint 1, akkor $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ invertálható, és

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots.$$

Lineáris leképezés

Az $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezések

28.D Legyen V és W két olyan nemüres halmaz, melyek elemei közt értelmezve van az összeadás és a valós skalárral való szorzás művelete. Az $f\colon V \to W$ leképezést ***lineáris leképezés***nek nevezzük, ha

1. f ***homogén***, azaz bármely $\mathbf{v} \in V$ és $c \in \mathbf{R}$ esetén $f(c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{v})$;
2. f ***additív***, azaz bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ esetén $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$.

(Hasonlóan definiálható valós helyett komplex számtesttel is a homogenitás olyan V és W halmazok esetén, ahol a komplex számmal való szorzás is definiálva van.)

T Az előző definíció 1. és 2. pontja ekvivalens a következővel:

3. bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ és $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ esetén $f(c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}) = c_1 f(\mathbf{u}) + c_2 f(\mathbf{v})$.

P Példák lineáris leképezésre:

1. Jelölje V az $[a, b]$ intervallumon differenciálható, W az $[a, b]$ intervallumon értelmezett függvények halmazát. A $V \to W\colon g \mapsto g'$ leképezés (a differenciálás operátora) lineáris leképezés.
2. Legyen V az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények halmaza, és legyen $W = \mathbf{R}$. A $V \to W\colon g \mapsto \int_a^b g$ leképezés lineáris.
3. Legyen V azon valós függvények halmaza, melyeknek van határértékük az x_0 pontban. Legyen $W = \mathbf{R}$. Az a leképezés, mely minden függvényhez az x_0 pontbeli határértékét rendeli, azaz a $V \to W\colon g \mapsto \lim_{x_0} g$ leképezés lineáris.

29.T *a)* Ha $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es valós (komplex) elemű mátrix, akkor az $T_{\mathbf{A}}\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés egy $\mathbf{R}^n$-ből $\mathbf{R}^m$-be ($\mathbf{C}^n$-ből $\mathbf{C}^m$-be) képező lineáris leképezés.

b) Ha $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ egy lineáris leképezés, akkor van olyan $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $f = T_{\mathbf{A}}$. Ez a mátrix a bázistól függően egyértelmű. Ha $\mathbf{R}^n$ egy bázisának elemeit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \mathbf{e}_n$ jelöli, akkor

$$\mathbf{A} = \left[\ f(\mathbf{e}_1)\ \middle|\ f(\mathbf{e}_2)\ \middle|\ \dots\ \middle|\ f(\mathbf{e}_n)\ \right].$$

B *a)* azonnal következik a mátrixműveletek tulajdonságaiból, ugyanis $\mathbf{A}(c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}) = c_1\mathbf{Au} + c_2\mathbf{Av}$.

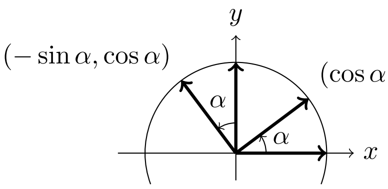
b) bizonyításához tegyük fel, hogy f lineáris leképezés. Legyen $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. Mivel f lineáris,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n) \\ &= \left[\ f(\mathbf{e}_1) \mid f(\mathbf{e}_2) \mid \ldots \mid f(\mathbf{e}_n)\ \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az előállítás egyértelműsége abból következik, hogy ha két mátrix különböző, mondjuk az i-edik oszopukban különböznek, akkor az általuk generált lineáris leképezések az $\mathbf{e}_i$ vektort máshová képzik, tehát azok is különböznek.

P ***Az origó körüli forgatás*** lineáris leképezés, melynek mátrixa α szöggel való forgatás esetén:

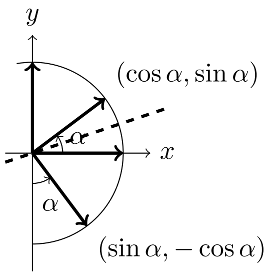
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



P ***Az origón átmenő egyenesre való tükrözés*** lineáris leképezés, melynek mátrixa, ha az egyenes az x-tengellyel $\alpha/2$ szöget zár be:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

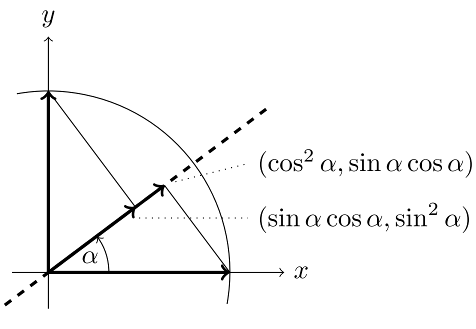
A bizonyítás leolvasható az alábbi ábráról:



P ***Az origón átmenő egyenesre való merőleges vetítés*** lineáris leképezés, melynek mátrixa, ha az egyenes az x-tengellyel α szöget zár be:

$$\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

A bizonyítás leolvasható az alábbi ábráról, hisz az ott látható két derékszögű háromszög befogóinak hossza $\cos\alpha$, illetve $\sin\alpha$, és így például a $\cos\alpha$ hosszú szakasz két tengelyvetülete $\cos^2\alpha$ és $\cos\alpha\sin\alpha$ hosszú.



P Mi a $(5, 10)$ koordinátájú pontnak a $3x - 4y = 0$ egyenletű egyenesre való merőleges vetületének koordinátái?

A megadott egyenes iránytangense $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$, így irányszögének szinusza és koszinusza is kiszámolható: $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$. Innen a vetítés mátrixának és a pontba mutató vektornak a szorzata:

$$\begin{bmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Sajátérték, sajátvektor

D Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixnak (illetve az $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezésnek) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ nemzérus vektor ***sajátvektora***, ha megadható egy olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, hogy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ (illetve $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$). E λ számot ***sajátérték***nek nevezzük, az $\mathbf{x}$ vektort e sajátértékhez tartozó ***sajátvektor***nak.

A definíció hasonlóan fogalmazható meg egy komplex elemű $\mathbf{A}$ mátrixra, illetve az $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ lineáris leképezésre is, ekkor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ és $\lambda \in \mathbb{C}$.

Egy $\mathbf{A}$ mátrix, illetve egy $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés ***sajátvektora*** az a vektor, amelyet a $T_{\mathbf{A}}$, illetve az A lineáris leképezés a saját maga skalárszorosába visz. Ha egy $\mathbf{v}$ vektor sajátvektor, akkor annak minden nemnulla skalárszorosa is sajátvektor, ezért elég csak az ún. sajátirányokat meghatározni.

Egy sajátértékhez tartozó sajátvektorok a zérusvektorral együtt alteret alkotnak, ezt ***sajátaltér***nek nevezzük.

Gyakran előfordul, hogy bár $\mathbf{A}$ elemei valósak, azt mint $\mathbb{C}$ feletti mátrixot tekintjük, és a komplex sajátértékeit és sajátvektorait is vizsgáljuk.

D A $\lambda \mapsto \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ függvény λ polinomja, amit az $\mathbf{A}$ mátrix ***karakterisztikus polinom***jának nevezünk, a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ egyenletet pedig az $\mathbf{A}$ ***karakterisztikus egyenlet***ének.

30.T Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix, λ egy adott szám. Ekkor a következők ekvivalensek:

(a) λ az $\mathbf{A}$ sajátértéke.

(b) A homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek van nemtriviális megoldása.

(c) λ megoldása a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ karakterisztikus egyenletnek.

B *(a)* $\iff$ *(b)*: λ az $\mathbf{A}$ sajátértéke $\iff$ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ és $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ $\iff$ $\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ $\iff$ az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek $\mathbf{x}$ nemtrivi megoldása.

(b) $\iff$ *(c)*: az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletnek $\mathbf{x}$ nemtriviális megoldása $\iff$ az együtthatómátrix determinánsa 0 $\iff$ az adott λ-ra $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

T Ha $\mathbf{A}$ egy háromszögmátrix (alsó, felső vagy diagonális), akkor sajátértékei megegyeznek főátlójának elemeivel.

31.T Az $\mathbf{A}$ mátrixnak a 0 pontosan akkor sajátértéke, ha $\mathbf{A}$ nem invertálható.

B A 30.T tétel szerint a 0 pontosan akkor sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, ha $\det(\mathbf{A}) = 0$, azaz ha $\mathbf{A}$ nem invertálható.

T Ha $\mathbf{A}_{n\times n}$ sajátértékei $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,\ \lambda_n$, akkor $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$, $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$, ahol $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ mátrix főátlóban lévő elemeinek összegét jelöli.

T Ha $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix, λ egy sajátértéke, melynek multiplicitása k, akkor a λ-hoz tartozó sajátaltér legfeljebb k-dimenziós.

P Az alábbi $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrix mindegyikének azonnal látható módon $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ a karakterisztikus polinomja, így $\lambda = 1$ kétszeres, és $\lambda = 2$ egyszeres sajátértéke, de míg az $\mathbf{A}$ esetén a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér 2-dimenziós, addig a $\mathbf{B}$ esetén ez 1-dimenziós.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} - 1\cdot\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát $\mathbf{A}$-nak a $\lambda = 1$-hez tartozó sajátaltere megegyezik az $x = 0$ egyenletből álló egyenletrendszer megoldásaival, vagyis az yz-sík vektoraival ($(x,y,z) = t(0,1,0) + s(0,0,1)$). Ez 2-dimenziós.

$$\mathbf{B} - 1\cdot\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát $\mathbf{B}$-nek a $\lambda = 1$-hez tartozó sajátaltere megegyezik az $x = 0$, $x + y = 0$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldásaival, vagyis a z-tengely vektoraival ($(x,y,z) = t(0,0,1)$). Ez 1-dimenziós.

Ortogonális mátrixok

D A négyzetes $\mathbf{C}$ mátrixot ***ortogonális***nak nevezzük, ha $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$.

D Az $\mathbf{R}^n$ egy vektorrendszerét ***ortonormált***nak nevezzük, ha elemei páronként merőleges egységvektorok.

T Legyen $\mathbf{A}$ egy $n\times n$-es mátrix. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$, azaz $\mathbf{A}$ ortogonális,
2. minden $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ vektorra $|\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$, aza $T_{\mathbf{A}}$ távolságtartó,
3. minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ vektorra $\mathbf{A}\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, azaz $T_{\mathbf{A}}$ skalárszorzattartó,
4. $\mathbf{A}$ oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak,
5. $\mathbf{A}$ sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

P Ha $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ortogonális, akkor f vagy egy origó közepű forgatás, vagy egy origón átmenő egyenesre való tükrözés. f mátrixa tehát (ha az elforgatás szöge α, illetve ha a tükrözés tengelye az x-tengellyel $\alpha/2$ szöget zár be):

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Áttérés másik bázisra

M Legyen az $\mathbf{R}^2$ tér két tetszőleges bázisa $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ és $F = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. Fejezzük ki az F bázis elemeit az E bázisban:

$$[\mathbf{f}_1]_E = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{f}_2]_E = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$

azaz

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}_2 &= c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Legyen egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor koordinátás alakja az F bázisban $[\mathbf{x}]_F = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, azaz $\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2$. Behelyettesítve a fenti egyenlőségeket a következőket kapjuk:

$$[\mathbf{x}]_E = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}_{F\to E} [\mathbf{x}]_F$$

Az $F \to E$ a mátrix indexében azt jelzi, hogy a mátrix az F bázisból az E-be való áttérés mátrixa. Általában, ha $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ és $F = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa, akkor az $F \to E$ áttérés mátrixa:

$$\left[\ [\mathbf{f}_1]_E \;\middle|\; [\mathbf{f}_2]_E \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; [\mathbf{f}_n]_E\ \right]$$

T Ha $\mathbf{C}$ az F-ből az E bázisba való áttérés mátrixa, akkor $\mathbf{C}$ invertálható, és az E-ből az F bázisba való áttérés mátrixa $\mathbf{C}^{-1}$.

T Ha E és F egyaránt ortonormált bázisok, akkor az áttérés $\mathbf{C}$ mátrixára $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$, tehát $\mathbf{C}$ ortogonális, így sorvektorai és oszlopvektorai is ortonormált rendszert alkotnak.

T Legyen $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ és $F = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa, az $F \to E$ áttérés mátrixát jelölje $\mathbf{C}$. Legyen $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ egy lineáris leképezés. A 29.T tétel szerint az A leképezés mátrixa az E, illetve F bázisban $[\mathbf{A}]_E = \left[\ [A(\mathbf{e}_1)]_E \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; [A(\mathbf{e}_n)]_E\ \right]$, illetve $[\mathbf{A}]_F = \left[\ [A(\mathbf{f}_1)]_F \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; [A(\mathbf{f}_n)]_F\ \right]$. Ezek között fennáll a következő összefüggés:

$$[\mathbf{A}]_F = \mathbf{C}^{-1}[\mathbf{A}]_E\mathbf{C}.$$

Hasonlóság, diagonalizálhatóság

D Azt mondjuk, hogy az azonos méretű és négyzetes $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok hasonlóak, ha van olyan invertálható C mátrix, hogy

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}.$$

T Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha létezik két olyan bázis, hogy az egyik mátrix az egyik bázisban, a másik mátrix a másik bázisban ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixa.

32.T Hasonló mátrixoknak azonos a

1. deteminánsuk,
2. rangjuk,
3. nyomuk,
4. karakterisztikus polinomjuk, így azonosak a sajátértékeik is.

B Először az utolsó állítást bizonyítjuk:
$\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}-\lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{C})$
$= \det(\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}^{-1})\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\det(\mathbf{C})$
$= \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$, hisz $\det(\mathbf{C}^{-1})\det(\mathbf{C}) = 1$. Tehát a karakterisztikus polinomok azonosak, így a sajátértékek is.

Mivel a determináns és a nyom kifejezhető a sajátértékek segítségével, és hasonló mátrixok sajátértékei azonosak, ezért determinánsuk és nyomuk is azonos.

A rangokra vonatkozó állítás abból a könnyen bizonyítható tételből következik, hogy ha egy invertálható mátrixot szorzunk egy r-rangúval, akkor a szorzatnak is r lesz a rangja.

P A $\left[\begin{smallmatrix}1&2\\0&3\end{smallmatrix}\right]$ és a $\left[\begin{smallmatrix}2&2\\1&2\end{smallmatrix}\right]$ mátrixok biztosan nem hasonlóak, mert különböző a determinánsuk.

D Azt mondjuk, hogy a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix ***diagonalizálható***, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális.

T
1. Az $\mathbf{A}_{n\times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független sajátvektora.
2. Különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.
3. Ha az $\mathbf{A}_{n\times n}$ mátrixnak n különböző valós sajátértéke van, akkor diagonalizálható.

B Az első állítást bizonyítjuk. Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, akkor létezik olyan $\mathbf{D}$ diagonális és $\mathbf{C}$ invertálható mátrix, hogy $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$, azaz $\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{D}$. Legyen $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1|\mathbf{c}_2|\dots|\mathbf{c}_n]$, és $\mathbf{D}$ főátlójának elemei legyenek d_1, d_2,…, d_n. Ekkor

$$\mathbf{A}[\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2 \mid \dots \mid \mathbf{c}_n] = [\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{c}_2 \mid \dots \mid \mathbf{c}_n]\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & d_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & d_n\end{bmatrix}.$$

A szorzások elvégzése után az oszlopvektorok összevetése igazolja az állítást:

$$[\mathbf{A}\mathbf{c}_1 \mid \mathbf{A}\mathbf{c}_2 \mid \dots \mid \mathbf{A}\mathbf{c}_n] = [d_1\mathbf{c}_1 \mid d_2\mathbf{c}_2 \mid \dots \mid d_n\mathbf{c}_n]$$

P Diagonalizáljuk az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}11&15\\-6&-8\end{smallmatrix}\right]$ mátrixot!

Az előző tétel bizonyítása egyúttal módszert is ad a diagonalizálásra. A sajátvektorokból álló mátrixszal, és annak inverzével kell szorozni az adott mátrixot. E mátrix sajátértékei 1 és 2, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $(-3,2)$, illetve $(-5,3)$. Így a $\mathbf{C} = \left[\begin{smallmatrix}-3&-5\\2&3\end{smallmatrix}\right]$ mátrixszal és annak inverzével, a $\mathbf{C}^{-1} = \left[\begin{smallmatrix}3&5\\-2&-3\end{smallmatrix}\right]$ mátrixszal számolva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\\ &= \begin{bmatrix}3&5\\-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11&15\\-6&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&-5\\2&3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

33.T ***Főtengelytétel és spektrálfelbontás:*** Ha $\mathbf{A}$ $n\times n$-es szimmetrikus mátrix, akkor minden sajátértéke valós, és sajátvektoraiból kiválasztható ortonormált rendszer. Legyen egy ilyen rendszer $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2,\dots\ \mathbf{s}_n$. Az $\mathbf{s}_i$ vektorhoz tartozó sajátértéket jelölje λ_i $(i = 1,\dots,n)$. Ekkor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \dots & \mathbf{s}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{s}_1^T\\ \mathbf{s}_2^T\\ \vdots\\ \mathbf{s}_n^T\end{bmatrix}$$

A műveleteket elvégezve:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \lambda_1\mathbf{s}_1\circ\mathbf{s}_1 + \lambda_2\mathbf{s}_2\circ\mathbf{s}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{s}_n\circ\mathbf{s}_n\\ &= \lambda_1\mathbf{s}_1\mathbf{s}_1^T + \lambda_2\mathbf{s}_2\mathbf{s}_2^T + \dots + \lambda_n\mathbf{s}_n\mathbf{s}_n^T.\end{aligned}$$

Ez utóbbi felbontást nevezik az $\mathbf{A}$ mátrix ***spektrálfelbontás***ának.

P Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}1&2\\2&-2\end{smallmatrix}\right]$ mátrix spektrálfelbontását!

Könnyen kiszámolható, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = -3$ és $\lambda_2 = 2$. A hozzájuk tartozó egységnyi sajátvektorok $\mathbf{x}_1 = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ és $\mathbf{x}_2 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}1&2\\2&-2\end{bmatrix}\\ &= \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^T + \lambda_2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^T\\ &= -3\cdot\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\-2/\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\end{bmatrix}\\ &\quad + 2\cdot\begin{bmatrix}2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\end{bmatrix}\\ &= -3\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix} + 2\cdot\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Összefoglaló tétel

T Legyen $\mathbf{A}$ egy $n\times n$-es mátrix. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ elemi sorműveletekkel az $\mathbf{I}_n$-be transzformálható,

2. $\mathbf{A}$ invertálható,
3. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletnek csak triviális megoldása van,
4. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenlet minden $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ vektorra megoldható,
5. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletnek minden $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ vektorra csak egyetlen megoldása van,
6. $\mathbf{A}$ sorvektorai lineárisan függetlenek,
7. $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek,
8. $\mathbf{A}$ sorvektorai kifeszítik $\mathbf{R}^n$-t,
9. $\mathbf{A}$ oszlopvektorai kifeszítik $\mathbf{R}^n$-t,
10. $\mathbf{A}$ sorvektorai $\mathbf{R}^n$ bázisát alkotják,
11. $\mathbf{A}$ oszlopvektorai $\mathbf{R}^n$ bázisát alkotják,
12. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$,
13. $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$,
14. a 0 nem sajátértéke $\mathbf{A}$-nak,
15. $T_\mathbf{A}$ kölcsönösen egyértelmű,
16. $T_\mathbf{A}$ magtere csak a $\mathbf{0}$-vektorból áll,
17. $T_\mathbf{A}$ képtere az egész $\mathbf{R}^n$.

Vektortér

A vektortér általános fogalma

34.D Legyen V egy tetszőleges nemüres halmaz. Legyen definiálva V-n két művelet: az összeadás, és a skalárral való szorzás, azaz bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ elemre és $\alpha \in \mathbf{R}$ skalárra legyen definiálva az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és az $\alpha\mathbf{a}$ elem. Azt mondjuk, hogy a V halmaz e két művelettel ***valós test feletti vektorteret*** alkot, ha bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ elemre és $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ skalárra fennállnak az alábbi összefüggések:

(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ (V az összeadásra nézve zárt);

(2) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ($'+'$ kommutatív);

(3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ ($'+'$ asszociatív);

(4) $\exists\mathbf{o} \in V$, hogy $\mathbf{o} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ (létezik zéruselem);

(5) $\forall\mathbf{a}\exists\mathbf{b}$, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{o}$ (létezik additív inverz);

(6) $\alpha\mathbf{a} \in V$ (V zárt a skalárral való szorzásra);

(7) $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$;

(8) $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$;

(9) $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$;

(10) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$;

Bármik is a V halmaz elemei, a V-ből képzett vektortér elemeit a vektortér ***vektor***ainak nevezzük.

M A fenti definícióban a valós $\mathbf{R}$ test kicserélhető bármely más testre, így például a $\mathbf{C}$ testre, ekkor $\mathbf{C}$ test feletti vektortérről beszélünk. Ha külön nem említjük, a továbbiakban valós test feletti vektorterekről beszélünk.

T Tetszőleges test feletti V vektortérre igazak az alábbi állítások:

1. Csak egyetlen zéruselem létezik.
2. Minden $\mathbf{a} \in V$ vektornak egyetlen additív inverze létezik.
3. Minden $\mathbf{a} \in V$ vektorra: $0\mathbf{a} = \mathbf{o}$.
4. Minden $\alpha \in \mathbf{R}$ valósra: $\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$.
5. Jelölje a tetszőleges $\mathbf{a} \in V$ elem additív inverzét $-\mathbf{a}$. E jelölés mellett $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.
6. Ha $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{o}$, akkor $\alpha = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{o}$.

P Néhány példa vektortérre:

1. az $\mathbf{R}^3$ tér origón áthaladó egy egyenesének (egy síkjának) pontjaiba mutató vektorok halmaza a szokásos vektorműveletekkel;
2. az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények $C[a, b]$ halmaza (differenciálható függvények $D[a, b]$ halmaza) a függvények között értelmezett összeadás és valós számmal való szorzás műveletével;
3. az $m \times n$ típusú valós mátrixok a mátrixok összeadásának és valós skalárral való szorzásának szokásos műveletével valósok feletti vektorteret alkot;
4. az $m \times n$ típusú komplex mátrixok valós skalárral való szorzás esetén valós test feletti vektorteret ad, míg komplex skalárral való szorzás esetén komplex test feletti vektorteret;
5. a legfeljebb negyedfokú valósegyütthatós polinomok halmaza a szokásos polinomműveletekkel.

M A vektortér elemeinek ***lineáris kombináció***ja, ***lineáris függetlenség***e ugyanúgy definiálható, mint korábban.

D Egy V vektortér egy L részhalmazát a V ***alter***ének nevezzük, ha L vektortér a V-beli összeadás és skalárral való szorzás műveletével.

T Legyen L a V vektortér egy nemüres részhalmaza. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. L altere V-nek;
2. tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ és $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in L$ és $\alpha\mathbf{a} \in L$ (azaz abból, hogy L eleget tesz-e a 34.D definíció tíz kikötésének, elég csak az (1)-t és az (6)-t ellenőrizni);
3. tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$ és $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ esetén $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in L$;
4. tetszőleges L-beli $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ vektorok összes lineáris kombinációja is L-ben van.