1. MAT A2 vizsga. 2007-05-31 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________________ Előadó:______

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, hogy igazak legyenek! *(14 pont)*

a) Az $f(x,y,z)$ függvény iránymenti deriváltja a P_0 pontban a...
irányban minimális.

b) Egy $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés képtere és magtere lineáris alterek, melyek dimenzióira fennáll, hogy...

c) *Főtengelytétel.* Minden $k \times k$ típusú ... mátrix sajátértékei ... ,
és sajátvektoraira igaz, hogy...

d) Tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) pont olyan, hogy tetszőleges $\delta > 0$ esetén van olyan (x, y) pont, ami az f kétváltozós függvény értelmezési tartományához tartozik, és $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az (x_0, y_0) pontban van határértéke és az L, ha .... van olyan ...., hogy f értelmezési tartományának minden olyan (x, y) pontjára, amire
...
fennáll, hogy
...

e) A kétváltozós f függvény másodrendű parciális deriváltjaira igaz, hogy $f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$, feltéve hogy ...

f) A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix *karakterisztikus egyenletén* a következő egyenletet értjük:

g) Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két invertálható $n \times n$-es mátrix. Szorzatuk determinánsa, inverze és transzponáltja kifejezhető a mátrixok determinánsával, inverzével, illetve transzponáltjával:

$\det(\mathbf{AB}) = \ldots \qquad (\mathbf{AB})^{-1} = \ldots \qquad (\mathbf{AB})^T = \ldots$

h) Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor ...

akkor tagjai tetszőlegesen átrendezhetőek anélkül, hogy a sor konvergens volta megváltoznék. Ha viszont például a fenti sor olyan Leibniz-sor, mely ...

akkor a sornak van olyan átrendezése, mely esetén a sor összege épp π.

i) Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ hatványsor konvergens az $[a-R, a+R]$ intervallumon, és összege $f(x)$, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x-a)^{k-1}$ hatványsor biztosan konvergens az
...

intervallumon és összegfüggvénye...

j) Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{R}^n$ tér $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots,$ $\mathbf{a}_k$ vektorai kifeszítik az L alteret, ha...

2. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ egyaránt inverze a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixnak, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. *(3 pont)*

3. Az alábbi állítások közül melyik igaz (I) és melyik nem (N)? *(6 pont)*:

a) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a $\mathbf{b}$ vektor benne van $\mathbf{A}$
oszlopterében ☐ sorterében ☐
magterében ☐ képterében ☐

b) A homogén lineáris $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha
$\det(\mathbf{A}) = 0$ ☐ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ☐
$\mathrm{rang}(\mathbf{A}) < n$ ☐ a 0 sajátértéke $\mathbf{A}$-nak ☐

c) Az $\mathbf{A}_{n\times n}$ mátrix rangja r, ha
az $\mathbf{A}$ sorlépcsős alakjában a 0-sorok száma $n - r$ ☐
a sortér dimenziója r ☐
bármely r oszlopvektor lineárisan független ☐

4. Cseréljük meg az integrálás sorrendjét az alábbi integrálban! *(3 pont)*

$$\int_0^{1/8} \int_{y^{1/3}}^{1/2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

5. Az $\int\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ kettősintegrált az $u = 2x - y$, $v = 2y$ helyettesítéssel másik koordinátarendszerre áttérve számítjuk ki. Határozzuk meg az

$$\int\int f(x(u,v), y(u,v))\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

integrálbeli Jacobi-determináns értékét. *(2 pont)*

6. Az $f(x,y,z)$ függvény mindegyik vegyes másodrendű parciális deriváltja 1 abban a P_0 pontban, ahol $\mathbf{grad}\, f(P_0) = \mathbf{0}$. A többi másodrendű parciális derivált értéke e pontban 2. Van-e szélsőértéke f-nek e pontban, és ha igen, milyen? *(2 pont)*