2. MAT A2 vizsga. 2007-06-07 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ____________ Előadó: ______

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, hogy igazak legyenek! *(10 pont)*

a) Az $f(x,y,z)$ függvény P_0 pontbeli, $\mathbf{grad}\, f(P_0)$ irányú iránymenti deriváltjának értéke egyenlő...

b) Ha egy $A\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ lineáris leképezés képtere 2-dimenziós, akkor magtere ... -dimenziós.

c) Tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) pont olyan, hogy tetszőleges $\delta > 0$ esetén van olyan (x,y) pont, ami az f kétváltozós függvény értelmezési tartományához tartozik, és $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az (x_0, y_0) pontban van határértéke és az L, ha .... van olyan ...., hogy f értelmezési tartományának minden olyan (x,y) pontjára, amire
...
fennáll, hogy
...

d) A többváltozós $f(P)$ függvény P_0-beli differenciálhatóságának elégséges feltétele, hogy a parciális deriváltak a P_0 ...

e) Annak a lineáris leképezésnek, amelyik a sík minden helyvektorát tükrözi az $x - \sqrt{3}y = 0$ egyenletű egyenesre két valós sajátértéke van: $\lambda_1 = \ldots$ és $\lambda_2 = \ldots$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok:

f) A homogén lineáris $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha $\det(\mathbf{A}) \ldots\ 0$, ami azzal ekvivalens, hogy $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) \ldots\ n$, ami azt jelenti, hogy **A** oszlopvektorai közt a lineárisan függetlenek száma ...

g) Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ hatványsor konvergens az $[a-R, a+R]$ intervallumon, és összege $f(x)$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$ hatványsor biztosan konvergens az
...
intervallumon és összegfüggvénye...

h) A gömbi (ρ, θ, ϕ) koordinátákra való áttérés Jacobi-determinánsának abszolút értéke...

2. Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés képtere altér $\mathbf{R}^m$-ben! *(3 pont)*

3. Mutassuk meg, hogy $|q| < 1$ esetén a $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ sor konvergens. *(3 pont)*

4. Adjuk meg az $f(x,y) = x^3 - y^3 + x^2 - xy + 1$ függvény origó körüli lineáris és másodfokú polinommal való közelítését (azaz első és másodfokú Maclaurin-polinomját), valamint teljes differenciálját! *(3 pont)*

5. Az alábbi állítások közül melyik igaz (I) és melyik nem (N)? A helyes válasz 1/2 pontot, a helytelen -1/2 pontot ér, meg nem válaszolt kérdésre 0 pont jár. *(8 pont)*

a) Az alábbi függvények lineáris leképezések:
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ x \mapsto 3x + 2$ ☐
$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2;\ (x,y) \mapsto (2x - y + 1, 3x + y - 2)$ ☐
$h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2;\ (x,y) \mapsto (3x - 4y, 3x + 2y)$ ☐
$g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2;\ (x,y) \mapsto (xy, -x - y)$ ☐

b) Tekintsük az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{4\times 4}$ mátrix determinánsát! Az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldeterminánst jelölje A_{ij}.
A determináns kifejtésében az $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$ elem a „+” előjelet kapja. ☐
$a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} + a_{24}A_{34} = \det(\mathbf{A})$ ☐
$a_{12}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{23} + a_{42}A_{24} = 0$ ☐
$\det(2\mathbf{A}) = 2\det(\mathbf{A})$ ☐

c) Ha egy sor konvergens, akkor tagjainak sorrendje átrendezhető, és az így kapott sor összege megegyezik az eredeti sor összegével. ☐
Ha egy sor abszolút konvergens, akkor automatikusan konvergens is. ☐
Ha $a_n \to 0$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens. ☐
A $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor divergens. ☐

d) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha a **b** vektor benne van **A**
képterében ☐ magterében ☐
oszlopterében ☐ sorterében ☐

6. Cseréljük meg az integrálás sorrendjét az alábbi integrálban! *(3 pont)*

$$\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$