

1. Határozzuk meg az alábbi értékeket!

(14 pont)

a) Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ egy 9×9 -es mátrix, előjeles aldeterminánsait jelölje A_{ij} . Ekkor

$$a_{41}A_{91} + a_{42}A_{92} + \dots + a_{49}A_{99} =$$

b) $a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + \dots + a_{49}A_{49} =$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}^4 =$$

$$d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} =$$

f) Ha $\mathbf{A}_{n \times n}$ sajátértékei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, akkor $\det(\mathbf{A}) =$

g) Ha sz \mathbf{A} egy $n \times m$ -es mátrix, és oszlopterének dimenziója d , akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszerben a szabad változók száma =

h) Az $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei:

i) Az $x + y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés sajátvektorai:

j) A sík origó körüli $\pi/6$ radiánnal való elforgatásának mátrixa =

k) A Cramer-szabály szerint a

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ -4x + 3y &= -7 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása:

2. Legyen \mathbf{A} és \mathbf{B} két $n \times n$ -es mátrix. Melyik igaz és melyik hamis a következő állítások közül? Amelyik hamis, oda írjunk egy olyan feltételt, mely igazgá teszi! (5 pont)

a) Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, akkor megoldható bármely más n -dimenziós \mathbf{b} vektor esetén is.

b) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásainak halmaza altér \mathbf{R}^n -ben.

c) Ha $\mathbf{CA} = \mathbf{CB}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

d) Ha $\det \mathbf{A} = 0$, akkor $\text{rang } \mathbf{A} < n$.

e) Ha $\det \mathbf{A} \neq 0$, akkor 0 nem lehet az \mathbf{A} sajátértéke.

3. Tömören igazolja az alábbi állításokat: (2+2 pont)

a) Egy lineárisan független vektorrendszer bármely nem-üres részhalmaza lineárisan független.

b) ha az A mátrixnak sajátértéke λ , és egy λ -hoz tartozó sajátvektora \mathbf{x} , akkor az A^2 mátrixnak sajátértéke λ^2 , és \mathbf{x} egy ehhez tartozó sajátvektora.

4. Írjuk fel a 4-dimenziós tér $x - y + 2z + 3w = 0$ egyenlettel megadott alterének egy bázisát! (4 pont)

5. Adja meg a $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ lineáris transzformáció mátrixát, ahol $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. (4 pont)

6. Válasszunk ki a 4-dimenziós $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 1, 1)$ vektorok közül maximális számú lineárisan függetlent, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként. (5 pont)

8. Az alábbi egyenletrendszernek az a és b valós paraméterek mely értékei mellett (a) nincs megoldása; (b) van egyértelmű megoldása; (c) van végtelen sok megoldása? (4 pont)

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 - x_2 + ax_3 = b$$

7. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerben nem ismerjük a \mathbf{b} vektort, de tudjuk, hogy az egyenletrendszer egyik megoldása $\mathbf{x} = (1, 1, 1, 1)$. Határozzuk meg az összes megoldását! (5 pont)

9. Az x milyen (valós vagy komplex) értékei mellett lesz az alábbi mátrix invertálható? Ha $x = 0$, akkor számítsuk is ki az inverzét! (5 pont)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x & -1 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ -3 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$