Vizsgakérdések – Matematika A2b (1.0 változat) **I. év, II. félév, 2014/15**

A hivatkozások a LA segédletre, és a Thomas 3. kötetére vonatkoznak. ▶ = kötelező bizonyítás.

1. Egyenletrendszerek: • (Ismétlés: síkbeli egyenes, térbeli egyenes és térbeli sík egyenletei/egyenletrendszerei, hipersík (2.1–2.19)), • *lineáris egyenletrendszer* általános alakja, megoldása, ekvivalens átalakításai (2.21-24) • egyenletrendszer két modellje (sormodell: hipersíkok, oszlopmodell: lineáris kombinációk) • *elemi sorműveletek* • *(redukált) lépcsős alak* • mátrix (redukált) lépcsős alakra hozhatósága, *Gauss-módszer* (2.36), *Gauss–Jordan-módszer* • redukált lépcsős alak egyértelmű (2.44) • szimultán egyenletrendszer megoldása

2. Megoldhatóság, a megoldások tere: • a főelemek oszlopai • *mátrix rangja* (3.2) • kötött és szabad változók száma ▶ az egyenletrendszer megoldhatóságának mátrixrangos feltétele (3.5, 3.6) • *altér*, *kifeszített altér* ▶ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak (3.8 (ez mátrixszorzással is igazolható), 3.12), *nulltér* • inhomogén és a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer megoldásainak kapcsolata (3.17) és az inhomogén ersz. megoldhatóságának oszlopteres feltétele (3.19) • lineáris függetlenség eldöntése (3.21) • elemi sorműveletek hatása a sor- és oszloptérre (3.23, 3.24) • bázis és ekvivalens definíciói (3.25, 3.28) • bázistétel (3.30) • *dimenzió* • dimenzió = rang (3.33) • dimenziótétel (3.36) ▶ sortér és nulltér merőlegessége (3.38) • merőleges kiegészítő altér • a négy kitüntetett altér • a lineáris algebra alaptétele (3.39)

3. Mátrixműveletek: • *mátrixműveletek*, műveletek blokkmátrixokkal (Kronecker-szorzat és hipermátrixok nem kell), • mátrixszorzatos alakok (vektorok skaláris és diadikus szorzata, lineáris egyenletrendszer, szimultán egyenletrendszer, lineáris helyettesítés) • szorzás standard egységvektorral • báziscsere mátrixszorzatos alakja: áttérés mátrixa, koordináták változása báziscserénél (4.24, 4.25) • egységmátrix, elemi mátrixok, elemi sorműveletek előállítása mátrixszorzással • vektorokra particionált mátrixok, a mátrixszorzat kifejezése sor- és oszlopvektorokkal, a szorzat oszlopai és sorai (4.32) • műveleti azonosságok (5.1-5.13) ▶ a mátrixszorzás asszociativitásának bizonyítása ▶ inverz egyértelműsége (5.7 utáni 3. megjegyzés) • $(\mathbf{I}-\mathbf{A})$ inverze, ha $\mathbf{A}$ nilpotens (5.8) • inverz létezéséhez elég az egyik feltétel, inverz kiszámítása elemi sorműveletekkel, inverz tulajdonságai (5.14) ▶ szorzat inverze (5.14 *c)*) • az invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága (5.15) • invertálhatóság, bázis, báziscsere (5.19–5.21) • diagonális és permutációs mátrixok, permutációs mátrix inverze, kígyók • háromszögmátrixok, szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok, az ezek közti műveletek, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ szimmetrikus (5.35) ▶ mátrix fölbontása szimmetrikus és ferdén szimmetrikus összegére (5.34) • LU-felbontás, egyenletrendszer megoldása, mátrix invertálása LU-felbontással

4. Determináns: • vektorok által kifeszített parallelogramma előjeles területe, ill. paralelepipedon előjeles térfogata • *determináns* • 0 értékű determináns (6.2, 6.3) • egyenletrendszer megoldhatósága és a determináns • determináns értékének kiszámítása • elemi mátrixok determinánsa • műveletek determinánsokon, determinánsok szorzásszabálya • permutációs mátrix determinánsa • determináns, mint kígyók determinánsainak összege (Sarrus-szabály) • előjeles aldetermináns, determináns rendjének csökkentése, kifejtési tétel (6.21) • *Vandermonde-determináns* értékének kiszámítása • Cramer szabály és mátrix inverzének elemei (inverz előállítása előjeles aldeterminánsokkal)

5. Lineáris leképezések: • a vektori szorzással definiált mátrixleképezés mátrixa (7.1) • mátrixleképezések és tulajdonságaik (7.4) • lineáris leképezés, példák (differenciáloperátor, határozott integrál, geometriai példák), • az $\mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$ lineáris leképezések megegyeznek a mátrixleképezésekkel (7.9) • lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban (7.12) • *hasonlóság* (7.14–16), • tartomány mértékének változása lineáris transzformációban • $\mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$ függvények differenciálhatósága, Jacobi-mátrixa, és annak kiszámítása, Jacobi-determináns • láncszabály • forgatás, tükrözés, vetítés mátrixának felírása (7.23, 7.29) • ortogonális mátrixok (7.67, 7.70)

6. Sajátérték, sajátvektor: • *sajátérték, sajátvektor, sajátaltér* ▶ sajátvektorok alterei (8.4, 8.5) • *karakterisztikus egyenlet/polinom* és annak gyökei, algebrai és geometriai multiplicitása • háromszögmátrix sajátértékei, $\det(\mathbf{A})$ és $\operatorname{trace}(\mathbf{A})$ kiszámítása sajátértékekkel (8.8, 8.9) • mátrix invertálhatósága és a 0 sajátérték (8.16) • mátrix hatványainak sajátértékei, mátrix hatványainak hatása sajátvektorok lineáris kombinációján (8.17–18) • szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok sajátértékei (8.19 *a), b)*) • lineáris leképezés sajátértékei, sajátvektorai ▶ sajátértékhez kapcsolódó invariánsok (8.23) • hasonlóság, diagonalizálhatóság ▶ diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele (8.25) • különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lin. függetlensége (8.30, 8.31) • diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás (8.33, 8.34) • ortogonális diagonalizálhatóság (9.1), • valós spektráltétel (9.3)

• (valós) kvadratikus formák, főtengelytétel (9.12) • * kvadratikus formák definitsége, és annak eldöntése a sajátértékekből és a vezető főminorokból

7. Parciális deriváltak (Thomas 14.): • *többváltozós* függvények • tartomány belső és határpontja, nyílt, zárt, korlátos tartomány • szintvonal, szintfelület • kétváltozós függvény határértéke és folytonossága (14.2) • két-út vizsgálat határérték nemlétezésének igazolására • összetett függvény folytonossága • *parciális derivált* (14.3) • a parciális derivált létezéséből nem következik a függvény folytonossága (8P) • magasabbrendű parciális deriváltak • vegyes parciális deriváltak egyezése (2T) • kétváltozós függvény deriváltja (281.o) • függvény diffhatóságának elégséges feltétele (3T és következménye) ▶ a diffhatóságból következik a folytonosság (281.o) • láncszabály (5T, 6T, 7T + LA), implicit differenciálás (8T) • *iránymenti derivált* ▶ iránymenti derivált kiszámítása (9T) ▶ az iránymenti derivált tulajdonságai (max, min, nulla változás irányai) • *érintősík* és egyenlete • *linearizáció* (303.o) • *teljes differenciál*

8. Szélsőérték (Thomas 14.7): • helyi max/min • parciális deriváltak viselkedése szélsőértékhelyen • kritikus pont, nyeregpont • szélsőérték keresése második deriváltakkal (11T) (3-változós eset is!) • absz. szélsőérték korlátos zárt tartományon

9. Többes integrál: • *kettősintegrál* • kettősintegrál kiszámítása kétszeres integrállal téglalaptartományon (Fubini-tétel: 1T) és normáltartományon (Fubini-tétel erősebb alak: 2T) • kettősintegrál határainak felírása, az integrálás sorrendjének cseréje • kettősintegrál polárkoordinátákkal ▶ körcikk területe és az r szereplése az $\iint f(r,\theta)r\,dr\,d\theta$ képletben (371.o) • hármasintegrál (15.4) • hármasintegrál henger és gömbi koordinátarendszerben (15.6) • helyettesítés többes integráloknál, Jacobi-determináns (403.o)

10. Sorozatok: • *konvergens* és *divergens* sorozatok, *határérték* • gyakran előforduló, nevezetes határértékek

11. Sorok: • *végtelen sor*, *részletösszeg*, *sor konvergenciája*, *összege* ▶ mértani sor konvergenciája és összege (81.o) • az n-edik tagon alapuló divergenciateszt (7T) • a tétel megfordítása nem igaz: a harmonikus sor divergens • műveletek sorokkal (sorok összege, különbsége, skalárszorosa: 8T) • integrálkritérium (9T) ▶ p-sorok konvergenciája (3P) • összehasonlító kritériumok ▶ hányadoskritérium (12T) • gyökkritérium (13T) • alternáló sorok, Leibniz-tétel (14T), alternáló sor összegének becslése (15T) • *abszolút és feltételes konvergencia* • abszolút konvergens sor konvergens • végtelen sor tagjainak átrendezése

12. Függvénysorok: • *hatványsorok* • hatványsor konvergenciatétele (Abel-tétel, 18T), valós hatványsor konvergenciatartományának alakja • hatványsor konvergenciasugara • tagonkénti differenciálhatóság (19T), integrálhatóság (20T) • hatványsorok (és sorok) szorzata • Taylor és Maclaurin-sorok • Taylor-polinom (120.o), Taylor-formula (123.o 22T) • kétváltozós Taylor-formula (336–337.o) • e^x, $\cos x$, $\sin x$ Taylor-sora • binomiális sor • Fourier-sor 2π és $2p$ szerint periodikus függvényekre ($2p$ esetén $\cos nx$ és $\sin nx$ helyébe $\cos\frac{n\pi x}{p}$ és $\sin\frac{n\pi x}{p}$, a π helyébe p írandó) • $(1+2+3+4+\cdots = -1/12$ nem lesz)