1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket! (**Hf**: b))

a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -3x & + & y & + & 2z & = & 11 \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & 5z & + & u & = & 3 \\ x & - & y & + & z & + & 2u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 6z & - & u & = & 2 \end{array}$

2. Oldjuk meg azokat a lineáris egyenletrendszereket, amelyeknek a kibővített mátrixa

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right]$ c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right]$

(**Hf**: b), c))

3. Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős, illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lépcsőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer megoldását, vektoros alakban is!

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ e) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

4. Határozzuk meg a következő síkok metszetét! Ha a metszet egyenes, adjuk meg az egyenes explicit egyenletét vektorosan és koordinátánként is! (**Hf**: c), d))

a) $2x - y + 3z = 3,\ \ x + y + z = 4,\ \ -x + 2y - z = 2;$
b) $2x - y + 3z = 3,\ \ x + y + z = 4,\ \ 3y - z = 5;$
c) $x + 3y + z = 2;\ \ x - y + 2z = -1;\ \ 3x + 5y - z = 5;$
d) $x + 3y + z = 2,\ \ x + 2y + 2z = 5.$

5. (**Hf**) Adjuk meg az $S_1 :\ 2x - y + z = 1$ sík explicit (paraméteres) egyenletét, illetve egyenletrendszerét! (Oldjuk meg az egyenletet mint egy egyenletből álló egyenletrendszert, és írjuk fel a megoldást vektorosan!)

6. Hány megoldása lehet az alábbi lineáris egyenletrendszereknek, ha a $*$-ok tetszőleges (nem feltétlenül egyenlő) számokat jelölnek?

$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & * & 2 \\ 0 & 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{cc|c} * & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & * & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

7. Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő mátrixokhoz tartozó egyenletrendszereknek? (**Hf**: b))

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a+b & 0 \\ 3 & -2 & a & b \\ -3 & -6 & a-b & 2b \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & a & 1 \end{array}\right]$

8. (**Hf**) Határozzuk meg a következő mátrixok rangját! (A mátrix rangja megegyezik a lépcsős alakjában a nem nulla sorok számával.)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

A házi feladatok megoldása

1.b A kibővített mátrix redukált lépcsős alakja $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, a megoldás:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + \frac{4}{3}s - t \\ \frac{1}{3} + \frac{7}{3}s + t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 4/3 \\ 7/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.b) A redukált lépcsős alak: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, a megoldás:

$$\begin{bmatrix} t \\ 1-3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c) A lépcsős alak, $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$ mutatja, hogy az egyenletrendszer ellentmondásos, nincs megoldása.

4.c) A metszetük egy pont: $\left(\dfrac{9}{20}, \dfrac{13}{20}, -\dfrac{2}{5}\right)$.

4.d) A metszetük egy egyenes, amelynek a vektoros egyenlete: $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, azaz az egyenes átmegy a $(11, -3.0)$ ponton, és irányvektora $(-4, 1, 1)$.

5. Az egyenlet(rendszer) redukált lépcsős alakja $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$, aminek a vektoros megoldása $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, tehát a sík (egy lehetséges) paraméteres egyenletrendszere $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t, \ \ y = s, \ \ z = t$.

7.b) A megoldások számának megállapításához elég lépcsős alakra hozni a mátrixot, nem szükséges a redukált lépcsős alak.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & a & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & b+3 \\ 0 & 2 & a & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}b+1 \\ 0 & 0 & a-\frac{2}{3} & -1-\frac{2}{3}b \end{array}\right]$$

Egy megoldás van, ha $a \neq \frac{2}{3}$, végtelen sok megoldás van, ha $a = \frac{2}{3}$, és $b = -\frac{3}{2}$, végül nincs megoldás ha $a = \frac{2}{3}$, és $b \neq -\frac{3}{2}$

8.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{bmatrix}, \text{ így a rang 2.}$$

$$B=\begin{bmatrix}1&2i&1+2i\\3&i&3-i\\4i&-3&-1+4i\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&2i&1+2i\\0&-5i&-7i\\0&5&7\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&2i&1+2i\\0&5&7\\0&0&0\end{bmatrix}, \text{ így a rang 2.}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&3&-2&-1\\-2&-6&4&2\\-1&-3&2&1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&3&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, \text{ így a rang 1.}$$