3. gyakorlat
Matematika A2

1. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Az alábbi mátrixműveletek közül végezzük el azokat, amelyek értelmezve vannak!

$$\mathbf{A}+\mathbf{A},\ \mathbf{A}+\mathbf{B},\ \mathbf{AB},\ \mathbf{AC},\ \mathbf{AC}+2\mathbf{C},\ \mathbf{AD}-3\mathbf{D},\ \mathbf{D}^2,\ \mathbf{CC}^T,\ \mathbf{BC},\ \mathbf{CB}$$

2. Számítsuk ki a következő mátrixok n-edik hatványát!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Egy mátrixot szimmetrikusnak nevezünk, ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Melyek szimmetrikusak a 2. feladat mátrixai közül? Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{AA}^T$ mindig szimmetrikus mátrix!

4. Igazak-e minden $n \times n$-es $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ mátrixra az alábbi egyenlőségek!

a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$

c) $(\mathbf{A}+\mathbf{I}_n)(\mathbf{A}-\mathbf{I}_n) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{I}_n^2$ d) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$

5. Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Mik az $\mathbf{XA}$ oszlopai, ha $\mathbf{X}$ oszlopai $\mathbf{o}_1$ és $\mathbf{o}_2$?

b) Mik az $\mathbf{AY}$ sorai, ha $\mathbf{Y}$ sorai $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_2$?

6. Mi történik egy $n \times n$-es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi $n \times n$-es mátrixokkal szorozzuk?

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

7. Legyen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Szimultán egyenletrendszerként oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket!

a) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ b) $\mathbf{BX} = A$ c) $\mathbf{XA} = B$ (azaz $\mathbf{A}^T\mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T$)

8. Számítsuk ki az alábbi mátrixok közül az invertálhatóak inverzét!

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$