1. Bontsuk fel az alábbi mátrixokat elemi mátrixok szorzatára, ha lehetséges:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{Hf})\ C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Adjuk meg az alábbi mátrixok LU felbontását (**Hf**: B, D, E, F):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. A 2. feladatban kiszámított LU-felbontásokat felhasználva oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket (**Hf**: c),d)):

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 &= -2 \\ -x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 7 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -3 \\ x_2 + 4x_3 &= -3 \\ 5x_1 + 6x_2 &= -4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

4. Az LU-felbontást felhasználva határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét! (**Hf**: A, B, D)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. (**Hf**) Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki az A, B, $A+B$, AB, A^{-1}, B^{-1}, $A^{-1}B^{-1}$ mátrixok determinánsát.

6. Elemi sorműveletek alkalmazásával számítsuk ki az alábbi determinánsokat! (**Hf**: b), c), d))

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

7. Számítsuk ki a következő $n \times n$-es mátrixok determinánsát! (**Hf**)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

A házi feladatok megoldása

1. A $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ átalakítást végrehajtó mátrixok rendre $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Így $E_3E_2E_1C = I$, amiből $C = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. A B mátrixot elemi sorműveletekkel (csak olyan fajtával, ahol egy sor többszörösét valamely alatta levő sorból vonjuk ki/ adjuk hozzá) lépcsős alakra hozzuk. $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$, és a sorműveletekhez tartozó elemi mátrixok inverzeinek szorzata: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 4 & 1 \end{bmatrix}$ (az egységmátrixba az (i, j) helyre beírunk egy c-t, ha a Gauss-redukciónál az i. sorból kivontuk a j. sor c-szeresét). Ekkor $B = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ugyanígy $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{7} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} \end{bmatrix}$,

$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$,

$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.

c)
$$\begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}$$
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

d)
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}$$
$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -\frac{15}{2} \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

(Az $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletet oldjuk meg: először az $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ egyenlet megoldását olvassuk le: $\mathbf{y}$ komponenseit fentről lefelé számítjuk ki, majd az $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ mátrixszorzásban az $\mathbf{x}$ komponenseit töltjük ki lentről fölfelé.)

4. Az A alsó háromszögmátrixra az $AX = I$ mátrixegyenlet X megoldásának oszlopait felülről lefelé töltjük ki, a B felső háromszögmátrixra a $BX = I$ mátrixegyenlet megoldásának oszlopait pedig alulról fölfelé. A D mátrix inverzét a 3. feladat módszeréhez hasonlóan két lépésben számítjuk ki.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = X$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. $|A| = 6$, $|B| = 2$, $|AB| = 6 \cdot 2 = 12$, $|A^{-1}| = \frac{1}{6}$, $|B^{-1}| = \frac{1}{2}$, $|A^{-1}B^{-1}| = \frac{1}{12}$,

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6.$$

6. b) 0, c) 7, d) 8

7. A második sort kivonjuk az összes többiből, aztán az első sor kétszeresét hozzáadjuk a másodikhoz. Ekkor felső háromszögmátrixot kapunk, amelynek az átlójában $-1, 2, 1, 2, \ldots, n-2$ áll, tehát a mátrix determinánsa $-2 \cdot (n-2)!$