1. Számítsuk ki a következő determinánsok értékét! (**Hf**: d), e), g), i))

a) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ & \iddots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{n\times n}$

2. Melyik igaz az alábbi determinánsos összefüggések közül minden $n\times n$-es mátrixra? Amelyik nem, arra adjunk ellenpéldát! (**Hf**: d), e))

a) $|AB| = |B^T A|$ b) $|A+B| = |A| + |B|$ c) $|2A| = 2|A|$
d) $|A^2 - I| = |A-I|\cdot|A+I|$ e) $|A^2 - B^2| = |A+B|\cdot|A-B|$

3. Bizonyítsuk be n-re vonatkozó teljes indukcióval, hogy $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_1^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} =$ $\prod\limits_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i)$ (Vandermonde-determináns)!

4. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat a Vandermonde-determináns felhasználásával!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$ b) (**Hf**) $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix}$ c) (**Hf**) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c+d & c^2+d^2 \end{vmatrix}$

5. Számítsuk ki a mátrixok inverzét az aldeterminánsaik segítségével! (**Hf**: A, D)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

6. A Cramer-szabály felhasználásával határozzuk meg y értékét az alábbi egyenletrendszerek megoldásában!

a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & -2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$ b) (**Hf**) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 9 \end{array}$

7. Melyikek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik igen, azt írjuk fel valamilyen mátrixszal való balszorzásként! (**Hf**: b),d))

a) $(x,y,z) \mapsto (x+1, y+1, z+1)$
b) $(x,y,z) \mapsto (x-2y, z, x+y+z)$
c) $(x,y,z) \mapsto (x+2y, 3x-y)$
d) $(x,y) \mapsto (xy, 0)$

A házi feladatok megoldása

1. d) -6 e) 144 g) -3

i) Az első oszlop szerinti kifejtésnél az aldeterminánsok háromszögmátrixok determinánsai lesznek, és ebből a determináns $a \cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1} b \cdot b^{n-1} = a^n - (-b)^n$.

2. d) Igaz a szorzástétel miatt, ugyanis $(A-I)(A+I) = A^2 - IA + AI - I^2 = A^2 - I$.

e) Ez nem következik a szorzástételből, ugyanis általában $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$, és valóban, például $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$-ra és $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$-re $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ determinánsa 0, míg $|A+B| \cdot |A-B| = (-1) \cdot 1 = -1$.

b) Ha a, b, c, d egyike sem 0, akkor a sorokat rendre a, b, c, d-vel beszorozva, majd a negyedik oszlopból $abcd$-t kiemelve a determináns változatlan lesz, és az 1. és 4., majd a 2. és 3. oszlop cseréjével Vandermonde-determinánst kapunk, amelynek értéke $(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)$. Ha valamelyik paraméter nulla, mondjuk, $a = 0$, akkor a determináns $-bcd \begin{vmatrix} b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \\ d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = bcd \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = bcd(c-b)(d-b)(d-c)$, tehát ekkor is megegyezik az előbbi eredménnyel, és ugyanígy megegyezik, ha a másik három paraméter valamelyike 0.

c) Felhasználjuk, hogy ha a $D(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n)$-nel jelöljük az $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$ sorú mátrix determinánsát, akkor $D(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_{n-1}, \mathbf{s}_n' + \mathbf{s}_n'') = D(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_{n-1}, \mathbf{s}_n') + D(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_{n-1}, \mathbf{s}_n'')$ (ami természetesen bármely más sor vagy oszlop szétbontására is következik a determinánsok adott sor, illetve oszlop szerinti kifejtéséből). Ennek alapján $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c+d & c^2+d^2 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) + (b-a)(d-a)(d-b) - ab(b-a).$$

5. $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D^{-1} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 54/27 = 2$

7. b) lineáris, az $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixszal való balszorzás.

d) Nem lineáris, pl. $(1,1)$ képe $(1,0)$, de $2 \cdot (1,1) = (2,2)$ képe $(4,0) \neq 2 \cdot (1,0)$.