# 7. gyakorlat
# Matematika A2

1. Közvetlenül a definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az alábbi számsorok konvergensek, és határozzuk meg a sorok $s$ összegét:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{10^{2n+1}} + \frac{2}{10^{2n+2}}\right)$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n$, $a > 0$
   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-i)^{3n}}{3^n}$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{3}i)^{9n}}{1024^n}$

2. Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergensek:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^k}$, $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$
   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{5^{n+a}-1}$, $a \in \mathbb{R}^+$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n2^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+in}$

3. A majoráns- illetve minoránskritérium segítségével öntsük el az alábbi sorok konvergenciáját:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-16}{n^5+n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2n^2-n}$
   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos\frac{n}{2})^{4n}}{n^n+1}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n}$ g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}$ h) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^5+1}}$

4. A hányados- illetve a gyökkritérium segítségével döntsük el az alábbi sorok konvergenciáját:
   a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e-1}\right)^n$
   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$ h) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

5. Vizsgáluk meg az alábbi sorok konvergenciáját az integrálkritérium segítségével:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

6. Döntsük el, hogy az alábbi váltakozó előjelű sorok konvergensek vagy divergensek:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n-2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$, $a < -1$
   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$, $k \in \mathbb{N}, a < -1$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100} 99^n}{100^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^k}{n!}$, $k \in \mathbb{N}$

7. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi valós számsorok közül melyek abszolút konvergensek, feltételesen konvergensek, illetve divergensek:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\sqrt{n}}$
   d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{2n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n)^n}{n^2+1}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)}$