1. Számítsuk ki az alábbi 2-változós függvények határértékét a megadott helyeken, vagy bizonyítsuk be, hogy a határérték nem létezik! (**Hf**d), e))

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 5}} \dfrac{x^2y}{x-y}$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to \infty}} \dfrac{2xy-1}{y+1}$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to \infty}} x\cos y$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ e) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^3+y^3}$

2. (**Hf**) Hol folytonos az $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{x}$ függvény? Adjuk meg az értékét az $\mathbb{R}^2\setminus D(f)$ halmazon úgy, hogy f a lehető legtöbb helyen folytonossá váljon!

3. Határozzuk meg az alábbi függvények gradiensét a megadott pontokban!
a) $f(x,y)=xe^{xy}$, $P_0(2,0)$
b) (**Hf**) $f(x,y)=\dfrac{\cos(x+y)}{x^2+y}$, $P_0(0,\pi)$
c) (**Hf**) $f(x,y,z)=x^2+xyz-\sqrt{x^2+y^2}$, $P_0(1,0,2)$

4. Keressük meg az alábbi felületek érintősíkját a megadott pontokban!
a) (**Hf**) $x^2+y^2+z^2=3$, $P_0(1,1,1)$
b) (**Hf**) $x^2+y^2-2xy-x+3y-z=-4$, $P_0(1,2,3)$
c) $z=\ln(x^2+y^2)$, $P_0(1,0,0)$

5. Adjuk meg az f függvény lineáris közelítését P_0 pontban! Használjuk ezt a kért függvényérték közelítő kiszámításához!
a) $f(x,y)=e^x\cos y$, $P_0(0,0)$, $e^{0,2}\cos 0,1$
b) (**Hf**) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $P_0(1,2,2)$, $\sqrt{1,1^2+1,8^2+2,1^2}$.

6. Mi az alábbi függvények adott irányú iránymenti deriváltja P_0-ban? Milyen irányú és mekkora a maximális, illetve minimális iránymenti derivált? Milyen irányban 0?
a) $f(x,y)=2x^2+y^2$, $P_0(-1,1)$, $\mathbf{a}=(4,3)$
b) (**Hf**) $f(x,y,z)=3e^x\cos(yz)$, $P_0(0,0,0)$, $\mathbf{a}=(2,1,-2)$.

7. Az $f(x,y)$ függvényre $f_x(2,1)=1$ és $f_y(2,1)=-1$, továbbá $f(2,1)=1$. Számítsuk ki az alábbi parciális deriváltakat a lánc-szabály segítségével:
a) $f(u+e^{u-1},u)$ deriváltja u szerint $u=1$-nél;
b) (**Hf**) $\sqrt{1+f^2(x,y)}$ parciális deriváltja x, illetve y szerint az $(x,y)=(2,1)$ helyen;
c) (**Hf**) $f(u^2+v,2v^2+u)$ parciális deriváltja az u szerint az $(u,v)=(-1,1)$ helyen!

A házi feladatok megoldása

1. d) A határérték nem létezik, mert pl. az $y=x$ görbén tartva $(0,0)$-hoz, a limesz $\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{2x^2}=0$, az $y=0$ görbén tartva $(0,0)$-hoz pedig $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$.

e) $x^2-xy+y^2\ge xy$, ugyanis $x^2-xy+y^2-xy=(x-y)^2\ge 0$. Így $x,y>0$-ra $0\le \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}\le \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}$, és a rendőr-elv miatt ebből $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$.

2. A függvény folytonos ott, ahol értelmezve van, tehát az $x\ne 0$ helyeken, mert folytonos függvényekből kompozíció és alapműveletek segítségével állítottuk elő. Másrészt

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} \dfrac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} \dfrac{\sin(xy)}{xy} y = y_0$, tehát a függvény definícióját úgy kell kiterjeszteni, hogy $f(0,y) = y$ legyen. A függvény így mindenütt folytonos lesz, mert $(0,y_0)$-ban $\{(x,y)\,|\,x \neq 0\}$-n és $\{(0,y)\,|\,y \in \mathbb{R}\}$-en is y_0-hoz tart.

3. b) $f_x = \dfrac{-\sin(x+y)(x^2+y) - \cos(x+y)\cdot 2x}{(x^2+y)^2}$, $f_y = \dfrac{-\sin(x+y)(x^2+y) - \cos(x+y)}{(x^2+y)^2}$, $\nabla f(0,\pi) = \left(0, \dfrac{1}{\pi^2}\right)$

c) $f_x = 2x + yz - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = xz - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_z = xy$, $\nabla f(1,0,2) = (1,2,0)$.

4. a) A felület a $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ függvény szinthalmaza, így a felület normálvektora g gradiense: $\nabla g(x,y,z) = (2x,2y,2z)$, $\nabla g(1,1,1) = (2,2,2)\,||\,(1,1,1)$. Az érintősík $x+y+z=3$.

b) $g = x^2+y^2-2xy-x+3y-z$-re $\nabla g(x,y,z) = (2x-2y-1, 2y-2x+3, -1)$, $\nabla g(1,2,3) = (-3,5,-1)$, az érintősík: $-3(x-1)+5(y-2)-(z-3) = 0$, azaz $-3x+5y-z = 4$.

5. b) $\nabla f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$,
$\nabla f(1,2,2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $f(x,y,z) \approx f(P_0) + \nabla f(P_0)(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 3 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-2) + \frac{2}{3}(z-2)$, ha (x,y,z) közel van $(1,2,2)$-höz.
Így $\sqrt{1,1^2+1,8^2+2,1^2} \approx 3 + \frac{1}{3}\cdot 0,1 - \frac{2}{3}\cdot 0,2 + \frac{2}{3}\cdot 0,1 \approx 2,97$.

6. b) $\nabla f(x,y,z) = \big(3e^x\cos(yz), -3ze^x\sin(yz), -3ye^z\sin(yz)\big)$, $\nabla f(P_0) = (3,0,0)$, $f_{\mathbf{a}}(P_0) = (3,0,0)(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = 2$. Az iránymenti derivált $\nabla f(P_0)$ irányában, azaz az $(1,0,0)$ irányban maximális (értéke 3), az ellentétes, azaz $(-1,0,0)$ irányban minimális (értéke -3), és a $\nabla f(P_0)$ vektorra merőleges irányokban (azaz tetszőleges $(0,y,z)$ irányban) 0.

7. b) $\sqrt{1+f^2(x,y)} = g(f(x,y)$, ahol $g(u) = \sqrt{1+u^2}$. Mivel $g'(u) = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $\dfrac{\partial}{\partial x} g(f(x,y)) = g'(f(x,y))\cdot f_x(x,y) = g'(f(2,1))\cdot f_x(2,1) = g'(1)\cdot 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ és $\dfrac{\partial}{\partial y} g(f(x,y)) = g'(f(x,y))\cdot f_y(x,y) = g'(f(2,1))\cdot f_y(2,1) = g'(1)\cdot(-1) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ az $(x,y) = (2,1)$ helyen.

c) $\dfrac{\partial}{\partial u} f(u^2+v, 2v^2+u) = f_x(u^2+v, 2v^2+u)\cdot 2u + f_y(u^2+v, 2v^2+u)\cdot 1 = f_x(2,1)\cdot(-2) + f_y(2,1)\cdot 1 = -3$ és $\dfrac{\partial}{\partial v} f(u^2+v, 2v^2+u) = f_x(u^2+v, 2v^2+u)\cdot 1 + f_y(u^2+v, 2v^2+u)\cdot 4v = f_x(2,1)\cdot 1 + f_y(2,1)\cdot 4 = -3$ az $(u,v) = (-1,1)$ helyen.