1. Hol vannak lokális szélsőértékei az alábbi kétváltozós függvényeknek?

a) $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

b) (**Hf**) $f(x,y) = x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{8}{y}$

c) (**Hf**) $f(x,y) = xy + 2x - \ln x^2 y$

d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

2. Keressük meg a következő függvények lokális szélsőértékeit!

a) (**Hf**) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 6z$

b) (**Hf**) $yz - 2x + 3z - (x^2 + y^2 + z^2)$

c) $x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{16}{z}$

3. Határozzuk meg az f függvény abszolút maximumát és minimumát a T tartományon, ahol

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3$, T a $(0,0), (9,0), (0,9)$ pontok által meghatározott zárt háromszögtartomány;

b) (**Hf**) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y$, $T = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \leq 2,\ y \geq 2x\}$;

c) (**Hf**) $f(x,y) = 6xy - 4x^3 - 3x^2$, $T = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$;

d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, $T = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;

e) (**Hf**) $f(x,y,z) = 2x - 2y + z$, $T = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$.

4. (**Hf**) Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2 - 4x - 4y + \frac{13}{2}$ felületnek az origóhoz, illetve a $2x + z = 0$ síkhoz legközelebb eső pontját pontját!

5. Számítsuk ki az alábbi kettős- és hármasintegrálokat! Ábrázoljuk az integrálás tartományát! (**Hf**: b), c))

a) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+2y}\, dy\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{3} \int_{-1}^{1} \int_2^{4} y - xz\, dz\, dy\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^{2} \int_{x^2}^{x} xy^2\, dy\, dx$ d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_0^{x} \int_{x-y}^{x+y} (z - 2x - y)\, dz\, dy\, dx$

6. Számítsuk ki az f függvény integrálját a T tartományon, ahol

a) (**Hf**) $f(x,y) = x\sqrt{x^2 + y}$, $T = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 3\}$;

b) $f(x,y) = \dfrac{y}{x+1}$, T az $y = x$ és $y = x^2$ görbék által határolt korlátos tartomány;

c) (**Hf**) $f(x,y) = x + y$, $T = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq \ln x\}$;

d) (**Hf**) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2}$, ahol T a $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ csúcsú háromszögtartomány;

e) $f(x,y,z) = z$, T az $x, y, z \geq 0$ nyolcadtérből a $2x + y + z = 4$ sík által kimetszett korlátos tartomány

A házi feladatok megoldása

1. b) $f_x = 1 - \dfrac{y}{x^2} = 0$, $f_y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{8}{y^2} = 0$ megoldása: $(x,y) = (2,4)$. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y/x^3 & -1/x^2 \\ -1/x^2 & 16/y^3 \end{vmatrix}$, és ez $(2,4)$-ben $\begin{vmatrix} 1 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{vmatrix} = 3/16 > 0$, és $f_{xx}(2,4) = 1 > 0$, tehát f-nek a $(2,4)$ pontban lokális minimuma van.

c) $f_x = y + 2 - 2/x = 0,\ \ f_y = x - 1/y = 0$ megoldása $(x, y) = (\frac{1}{2}, 2)$. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/x^2 & 1 \\ 1 & 1/y^2 \end{vmatrix}$, és ez $(\frac{1}{2}, 2)$-ben $\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 1/4 \end{vmatrix} = 1 > 0$, és $f_{xx}(\frac{1}{2}, 2) = 8 > 0$, tehát f-nek lokális minimuma van $(\frac{1}{2}, 2)$-ben.

2. a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 6z$-re $\nabla f = (2x + 2,\ 2y + 2,\ 2z - 6) = \mathbf{0}$, ha $(x, y, z) = (-1, -1, 3)$. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, amelynek a főminorjai $2 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ és a teljes determináns $8 > 0$, tehát a $(-1, -1, 3)$ pontban az f függvénynek lokális minimuma van.

b) $f(x, y, z) = yz - 2x + 3z - (x^2 + y^2 + z^2)$-re $\nabla f = (-2 - 2x,\ z - 2y,\ y + 3 - 2z) = \mathbf{0}$, ha $(x, y, z) = (-1, 1, 2)$. $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, amelynek főminorjai $-2 < 0$, $4 > 0$ és $-6 < 0$, tehát f-nek a $(-1, 1, 2)$ pontban lokális maximuma van.

3. b) $\nabla f(x, y) = (4x - 4, 2y - 4) = \mathbf{0}$, a $P_1(1, 2) \in T$, amely csúcspontja a tartománynak. A T tartomány határai $x = 0$, $y = 2$, és $y = 2x$. Az $x = 0$ határvonalon $g(y) := y^2 - 4y$, $g'(y) = 2y - 4 = 0$ a $P_2(0, 2)$ ponton, amely a tartománynak csúcspontja. Az $y = 2$ határvonalon $h(x) := 2x^2 - 4x - 4$, $h'(x) = 4x - 4 = 0$ az $(1, 2)$ ponton, amely már szerepelt. Az $y = 2x$ határvonalon $k(x) = f(x, 2x) = 6x^2 - 12x$, $k'(x) = 12x - 12 = 0$, az $(1, 2)$ ponton, ez megint nem ad új kritikus pontot. Így a kritikus pontok csak a csúcspontok: $(1, 2)$, $(0, 2)$ és $(0, 0)$, a függvényérték ezeken -6, -4 és 0, tehát a minimum -6, amelyet az $(1, 2)$ pontban, a maximum 0, amelyet a $(0, 0)$ pontban vesz fel a függvény.

c) $\nabla f(x, y) = (6y - 12x^2 - 6x,\ 6x) = \mathbf{0}$, a $(0, 0)$ pontban, amely a tartománynak csúcspontja. A határvonalak az $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ és $y = 1$ egyenesek, és ezeken a $(0, y)$ $(0 \le y \le 1)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ és $(\frac{1}{2}, 1)$ kritikus pontokat találjuk (a negyedik egyenesen a $(-1, 1)$ is kritikus pont, de az kívül esik a tartományon. A csúcspontokkal együtt a $(0, y)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 1)$ pontokon kell összehasonlítanunk a függvény értékeit, és ezek az értékek: 0, -7, $-\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, -1, tehát a minimum -7 (az $(1, 0)$ pontban), a maximum pedig $\frac{7}{4}$ az $(\frac{1}{2}, 0)$ pontban.

e) A függvény gradiense sehol nem 0, így a tartomány belsejében nincs kritikus pont. A határoló felületek a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és a $z = 4$ sík. Az elsőre megszorítva a függvényt: $g(x, y) := f(x, y, x^2 + y^2) = 2x - 2y + x^2 + y^2$ gradiense $(2 + 2x,\ -2 + 2y) = \mathbf{0}$ a $(-1, 1, 2)$ pontban, amely a felületdarab belsejébe esik. A másodikra megszorítva: $h(x, y) = 2x - 2y + 4$ gradiense sehol nem 0, így itt nem kapunk kritikus pontot. Végül a két felület $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4$ egyenletű határvonalán a $k(t) = f(2\cos t, 2\sin t, 4) = 4\cos t - 4\sin t + 4$ függvényre $k'(t) = -4\sin t - 4\cos t = 0$, ha $\operatorname{tg} t = -1$, azaz $t = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, és ez a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$ és $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4)$ kritikus pontokat adja. A három kritikus ponton a függvény értéke -2, $-4\sqrt{2} + 4$, illetve $4\sqrt{2} + 4$, tehát a minimum -2 a $(-1, 1, 2)$ pontban, a maximum pedig $4\sqrt{2} + 4$ a $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4)$ pontban.

4. Az origótól vett távolság négyzete $g(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2 - 4x - 4y + \frac{13}{2})^2$, ennek a függvénynek az abszolút minimumát keressük. Ez a minimum nyilván létezik, mert a keresést megszoríthatnánk egy olyan origó körüli körlapra, amely magában foglalja

a felületnek legalább egy pontját. Másrészt ez az abszolút minimum szükségképpen lokális minimum is, mert az egész síkra nézve minimum. A
$g_x = 2x + 2(x^2 + y^2 - 4x - 4y + \frac{13}{2})(2x - 4) = 0,$
$g_y = 2y + 2(x^2 + y^2 - 4x - 4y + \frac{13}{2})(2y - 4) = 0$
egyenletrendszer megoldására teljesül, hogy $x^2+y^2-4x-4y+\dfrac{13}{2} = -\dfrac{x}{2x-4} = -\dfrac{y}{2y-4}$, és az utóbbi egyenlőségből $y = x$ adódik (az egyenletből következik, hogy nem osztottunk 0-val). Ezt behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy
$2x^3 - 12x^2 + 23x - 13 = 0.$
Ennek láthatóan gyöke az 1, és az $(x - 1)$-et kiemelve láthatjuk, hogy nincs több valós gyöke. Tehát az egyetlen lehetséges szélsőértékhely az $(x, y) = (1, 1)$, és így szükségképpen itt veszi föl a g függvény a minimumát. Ez azt jelenti, hogy a felület origóhoz legközelebbi pontja $(1, 1, \frac{1}{2})$.

Egy (x_0, y_0, z_0) pontnak a megadott síktól való távolsága $|2x_0 + z_0|/\sqrt{5}$, tehát a $|2x + x^2+y^2-4x-4y+\frac{13}{2}|$ függvény abszolút minimumát keressük. $2x+x^2+y^2-4x-4y+\frac{13}{2} = (x-1)^2 + (y-2)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}$ miatt ez a minimum $\frac{3}{2}$, és az $(x, y) = (1, 2)$ pontban veszi föl a függvény. Mivel ez a függvény mindig pozitív, az abszolútértékének is ez a minimuma. Így a felületnek a síkhoz legközelebbi pontja $(1, 2, -\frac{1}{2})$. (Itt is megkereshetnénk a lokális minimumot a parciális deriváltak vizsgálatával, de nehezebb lenne megindokolni, hogy ez miért abszolút minimum.)

5. b) $\int_0^3 \int_{-1}^1 \int_2^4 y - xz\,dz\,dy\,dx = \int_0^3 \int_{-1}^1 \left[yz - \frac{1}{2}xz^2\right]_2^4 dy\,dx = \int_0^3 \int_{-1}^1 2y - 6x\,dy\,dx = \int_0^3 \left[y^2 - 6xy\right]_{-1}^1 dx = \int_0^3 -12x\,dx = \left[-6x^2\right]_0^3 = -54.$ Az integrálás tartománya egy téglatest.

c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^x xy^2\,dy\,dx = \int_0^2 \left[\frac{1}{3}xy^3\right]_{x^2}^x dx = \int_0^2 \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^7\,dx \left[\frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{24}x^8\right] = -\frac{128}{15}.$
Az integrálás tartománya az $y = x^2$ és $y = x$ görbék által közrezárt tartománynak az $x = 0$ és $x = 2$ egyenesek közötti része, de a kereszteződés utáni integrált negatívan véve.

6. a) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^1 x\sqrt{x^2+y}\,dx\,dy = \int_0^3 \left[\frac{1}{3}(x^2+y)^{3/2}\right]_0^1 dy = \int_0^3 \frac{1}{3}(y+1)^{3/2} - \frac{1}{3}y^{3/2}\,dy = \left[\frac{2}{15}(y+1)^{5/2} - \frac{2}{15}y^{5/2}\right]_0^3 = \frac{62-18\sqrt{3}}{15}.$

c) $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln x} x + y\,dy\,dx = \int_1^e \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{\ln x} dx = \int_1^e x\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\,dx.$ Mindkét tag integrálját parciális integrálással tudjuk kiszámítani: $\displaystyle\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$, és $\displaystyle\int \frac{1}{2}(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - \int \frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{x}\ln x\,dx = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - \int \ln x\,dx = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\ln x + \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\ln x + x + C.$ Ebből $\displaystyle\int_1^e \int_0^{\ln x} x + y\,dy\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{2}x(\ln x)^2 - x\ln x - \frac{1}{4}x^2 + x\right] = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}e - \frac{3}{4}.$ Valamivel egyszerűbb az integrál, ha megcseréljük a sorrendet (és ehhez tartozóan átírjuk a határokat is!):
$\displaystyle\int_0^1 \int_{e^y}^e x + y\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy\right]_{e^y}^e dy = \int_0^1 \frac{1}{2}e^2 + ey - \frac{1}{2}e^{2y} - ye^y\,dy =$

$\left[\frac{1}{2}e^2y + \frac{1}{2}ey^2 - \frac{1}{4}e^{2y} - ye^y\right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot e^y \, dy = \left[\frac{1}{2}e^2y + \frac{1}{2}ey^2 - \frac{1}{4}e^{2y} - ye^y + e^y\right]_0^1 =$
$\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{2}e - \frac{3}{4}$.

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{1+x^2} \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2} \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} \, dx =$
$\left[\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.