1. Számítsuk ki az $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=2-2x^2$ felületek által határolt korlátos tartomány térfogatát!

2. Az integrálás sorrendjének felcserélésével számítsuk ki az alábbi kettősintegrálokat!

a) $\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 y e^{(x-1)^2}\, dx\, dy$ b) (**Hf**) $\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3}-x\right) dx\, dy$

3. Határozzuk meg a következő vektor-vektorfüggvények deriváltleképezésének mátrixát egy tetszőleges pontban, illetve a megadott P_0 pontban! Számítsuk ki a mátrix determinánsát is egy tetszőleges helyen!

a) $(x,y,z) \to (x^2+yz, xyz, z+1)$, $P_0(1,2,1)$

b) $(x,y) \to (2x-y, x+y)$

c) (**Hf**) $(r,\theta) \to (3+r\cos\theta, -2+r\sin\theta)$, $P_0(2,\frac{\pi}{4})$.

4. Használjunk alkalmas polár-koordinátarendszert a következő integrálok kiszámításához!

a) (**Hf**) $f(x,y)=x^2$ integrálja az origó körüli 1 sugarú körlap első nyolcadán

b) (**Hf**) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ integrálja a $T=\{(x,y)\,|\,x^2-2x+y^2=0\}$ tartományon

c) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} 1\, dx\, dy$

d) (**Hf**) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2+y^2)\, dx\, dy$

e) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{\sqrt{y^2+z^2}} x\, dx\, dy\, dz$

f) (**Hf**) $\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz,$

ahol $T=\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{3x^2+3y^2}\le z,\ 9\le x^2+y^2+z^2\le 81\}$

5. Számítsuk ki az alábbi tartományok térfogatát:

a) A $z=x^2+y^2$ és $z=27-2x^2-2y^2$ paraboloidok által határolt korlátos tartomány;

b) (**Hf**) Az 1 sugarú göbből 90°-os nyílásszögű, a gömb középpontjába eső csúcsú kúp által kivágott rész;

c) (**Hf**) A $T=\{(x,y,z)\,|\,z\le\sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\ge 1,\ z>0\}$.

A házi feladatok megoldása

2. b) Az integrálás tartománya az $y=x^2$ parabola, az $y=1$ egyenes és az $x=2$ egyenes által közrezárt tartomány. Ezen másik sorrendben integrálva: $\int_1^2 \int_1^{x^2} \sin\left(\frac{x^3}{3}-x\right) dy\, dx = \int_1^2 (x^2-1)\sin\left(\frac{x^3}{3}-x\right) dx = \left[-\cos\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\right]_1^2 = -\cos\frac{2}{3}+\cos\left(-\frac{2}{3}\right)=0.$

3. c) Legyen $f(r,\theta)=(u(r,\theta),v(r,\theta))=(3+r\cos\theta,-2+r\sin\theta)$. Ekkor az f deriváltleképezésének mátrixa $\begin{bmatrix} u_r & u_\theta \\ v_r & v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$. $(2,\frac{\pi}{4})$-ben ez az $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ mátrix, és a determináns értéke tetszőleges (r,θ)-ra $r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$.

4. a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/4}\left[\frac{1}{4}r^4\cos^2\theta\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cos 2\theta\,d\theta = \left[\frac{1}{8}\theta+\frac{1}{16}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{32}+\frac{1}{16}.$

b) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r\cdot r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{3}\cos^3\theta\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{3}\cos\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta = \left[\frac{8}{3}\sin\theta-\frac{8}{9}\sin^3\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{16}{9}-\left(-\frac{16}{9}\right)=\frac{32}{9}.$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^1(\sin r^2)r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}\cos r^2\right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{4}(1-\cos 1)$

f) Gömbi koordinátákkal felírva a tartományt definiáló egyenlőtlenségeket: $\sqrt{3x^2+3y^2} = \sqrt{3\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+3\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi} = \sqrt{3}\rho\sin\varphi \le z = \rho\cos\varphi$, azaz $\operatorname{tg}\varphi \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, vagyis $0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}$, és $3\le\rho\le 9$. Mivel a gömbi koordinátákra való áttérés Jacobi-determinánsa $\rho^2\sin\varphi$, az integrál értéke $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_0^{2\pi}\int_3^9\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{\pi/6}12\pi\sin\varphi\,d\varphi = [-12\pi\cos\varphi]_0^{\pi/6} = 12\pi\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\pi(2-\sqrt{3}).$

5. b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 1\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2}).$

c) Ez egy 2 sugarú gömb felső felének egy egy sugarú hengeren kívül eső része. Hengerkoordinátákkal érdemes kiszámolni a térfogatot: $\displaystyle\int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,d\theta\,dr = \int_1^2\int_0^{2\pi} r\sqrt{4-r^2}\,d\theta\,dr = \int_1^2 2\pi r\sqrt{4-r^2}\,dr = \left[-\pi(4-r^2)^{3/2}\frac{2}{3}\right]_1^2 = 2\sqrt{3}\pi.$