1. Döntsük el az alábbi számsorozatokról, hogy konvergensek, korlátosak, monotonok-e, és mik a torlódási pontjaik!

$a_n = \cos\frac{n\pi}{4}$ $\quad b_n = \frac{n-1}{n}$ $\quad c_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

$d_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{-n}$ $\quad e_n = -2^n$ $\quad f_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2$

2. (**Hf**) Bizonyítsuk be, hogy az $a_1 = 2,\ \ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ rekurzióval megadott sorozat korlátos és monoton fogyó! Határozzuk meg a határértékét!

3. Határozzuk meg a következő sorozatok határértékét! (**Hf**: e), f), g))

a) $\frac{n^3 - 2n + 1}{2n^3 + 3}$ $\quad$ b) $\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2 - 3n}$ $\quad$ c) $(n+2)^{1/\sqrt{n}}$

d) $\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$ $\quad$ e) $\frac{3^n + 2^n}{3^{n+1} - 5}$ $\quad$ f) $\left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^{2n}$ $\quad$ g) $\sqrt[n^2]{2n}$

4. Döntsük el, hogy konvergensek-e az alábbi számsorok, és ha igen, akor határozzuk meg az összegüket! (**Hf**: e), f))

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-1}{n+1}\right)$ $\quad$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ $\quad$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\quad$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ $\quad$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{3^{n+2}}$

A házi feladatok megoldása

2. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség miatt $a_{n+1} \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}$, ha $n \geq 1$, és $a_1 \geq \sqrt{2}$ nyilvánvaló. Ebből megkapjuk azt is, hogy a sorozat monoton fogyó, ugyanis $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \leq a_n$, mivel $\frac{1}{2}(a_n - \frac{2}{a_n}) = \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} \geq 0$ az előbbiek alapján. Tehát bizonyítottuk azt is, hogy a sorozat alulról korlátos (persze, alsó korlátnak a 0 is jó lett volna), és azt is, hogy monoton fogyó (mellesleg az utóbbi miatt $a_1 = 2$ természetes felső korlát is, tehát a sorozat korlátos). Így a sorozat konvergens. Ha a határértéke A, akkor az $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_2})$ egyenlőség mindkét oldalának a limeszét véve azt kapjuk, hogy $A = \frac{1}{2}(A + \frac{2}{A})$, amit átrendezve $A^2 - 2 = 0$, tehát $A = \pm\sqrt{2}$. De $a_n \geq 0$ miatt $A \geq 0$, így $A = \sqrt{2}$.

3. e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1} - 5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n(1 + (\frac{2}{3})^n)}{3^{n+1}(1 - \frac{5}{3^{n+1}})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + (\frac{2}{3})^n}{3(1 - \frac{5}{3^{n+1}})} = \frac{1}{3}.$

f) A sorozat 1^∞ típusú, így visszavezetjük $(1+x)^x$ típusú limeszre, amelyről tudjuk, hogy e-hez tart, ha $x \to 0$.

$$\left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{2}{2^n+1}\right)^{2n} = \left(\left(1 + \frac{2}{2^n+1}\right)^{\frac{2^n+1}{2}}\right)^{\frac{4n}{2^n+1}} \to e^0 = 1.$$

g) ∞^0 típusú limesz, tehát a $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ határértékre vezethető vissza: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{2n} = \lim_{n\to\infty} ((2n)^{1/2n})^{2n/n^2} = 1^0 = 1$

4. e) Az $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$ átalakításból látszik, hogy a sor teleszkópos. A tagok ugyan tartanak 0-hoz ($\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln 1 = 0$), de a részletösszeg N-ig $\sum_{n=1}^{N}(\ln(n+1) - \ln n) = \ln(N+1) - \ln 1 = \ln(N+1)$ végtelenhez tart, így a sor divergens.

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1+2i}{3}\right)^n = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{1+2i}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2-2i} = \frac{1}{12}(1+i) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}i$, ugyanis $\left|\frac{1+2i}{3}\right| = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$, tehát a sor konvergens, és alkalmazható a mértani sor összegképlete.