1. Konvergensek-e a következő számsorok? (**Hf**: c), d))

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-2n+1}{2n^2+n+2}$

2. Döntsük el, hogy konvergensek-e, abszolút konvergensek-e az alábbi számsorok! (**Hf**: e), f))

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$

3. Határozzuk meg a következő függvénysorok értelmezési tartományát és konvergenciatartományát! (**Hf**: a), c))

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(z+3)^n}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^n$

4. Határozzuk meg a következő hatványsorok konvergenciatartományát! (**Hf**: b), c))

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^2} x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}(x+1)^n$

5. Adjuk meg a következő hatványsorok összegfüggvényét! (**Hf**: c), d))

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^n (x-1)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{n}(x+1)^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+ni)(iz)^n$

A házi feladatok megoldása

1. c) $\frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{1}{2n}$, és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, így a minoráns kritérium miatt az eredeti sor is divergens.

d) Használjuk azt a tételt, hogy ha $a_n, b_n > 0$, és $a_n \sim b_n$, azaz $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, akkor $\sum a_n$ és $\sum b_n$ egyszerre konvergens vagy divergens. Mivel $n^3-2n+1 \sim n^3$, és $2n^2+n+2 \sim 2n^2$, $\frac{n^3-2n+1}{2n^2+n+2} \sim \frac{n^3}{2n^2} = \frac{1}{2n}$, és $\sum \frac{1}{2n}$ divergens, így az eredeti sor is az.

2. e) A sor nem abszolút konvergens, mert $\frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$, és $\sum \frac{1}{n}$ divergens. Viszont Leibniz-sor, ugyanis váltakozó előjelűek a tagjai, $\frac{n}{n^2+1} \to 0$, és abszolútértékben monoton fogyók a tagok: $\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$, mert $(n+1)(n^2+1) = n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n = n((n+1)^2+1)$. Tehát a sor konvergens, de nem abszolút konvergens, vagyis a sor feltételesen konvergens.

f) Annak eldöntéséhez, hogy a sor abszolút konvergens-e, a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^n}$ sor konvergenciáját kell megvizsgálnunk. Ezt a hányados- vagy gyökkritérium nem dönti el (a hányadosnak és az n-edik gyöknek a limesze is 1), tehát az integrálkritériumot használjuk. Az $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ függvény a $[2, \infty)$ intervallumon nemnegatív, monoton fogyó és nullához tartó, továbbá $\int_2^x \frac{1}{x \ln^2 x} = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^\infty = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$. Tehát az integrál konvergens, és így a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^n}$ sor is az. Ez azt jelenti, hogy az eredeti sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens is.

3. a) Az értelmezési tartománya $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|1+\frac{1}{x}\right| = \left|1+\frac{1}{x}\right| < 1$, ha $-1 < 1 + \frac{1}{x} < 1$, azaz $x < -\frac{1}{2}$, tehát a $(-\infty, -\frac{1}{2})$ intervallumon abszolút konvergens a függvénysor. $x = -\frac{1}{2}$-ben $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ divergens, mert a tagok nem tartanak 0-hoz. Így a konvergenciatartomány $K = (-\infty, -\frac{1}{2})$.

c) Az értelmezési tartomány $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$ (a z változó utal arra, hogy komplex függvénysorról van szó).

A hányadoskritériummal: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)!(x+3)^{n+1}}}{\frac{1}{n!(z+3)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)|z+3|} \to 0 < 1$ minden $z \neq -3$-ra, tehát a függvénysor a teljes értelmezési tartományán abszolút konvergens: $K = \mathbb{C} \setminus \{-3\}$.

4. b) A hányadoskritériummal:

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{n!|x|^n}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to \infty$, ha $x \neq 0$, 0-ban viszont nyilván konvergens a hatványsor, tehát a konvergenciatartomány $\{0\}$.

c) A gyökkritériumot használjuk: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)|x| = |x|$, tehát $|x| < 1$ esetén a sor abszolút konvergens. A határokon: $\sum_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n$, illetve $\sum_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ mindegyike divergens, mert a sor tagjai nem tartanak 0-hoz: $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{-1} = e^{-1}$. Tehát a konvergenciatartomány $K = (-1, 1)$.

5. c) Ha $f(x)$ az összeg, akkor $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (3^n + 2^n)(x+1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 3(3x+3)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(2x+2)^{n-1} = \frac{3}{1-(3x+3)} + \frac{2}{1-(2x+2)} = \frac{3}{-2-3x} + \frac{2}{-1-2x}$, ahol a mindkét mértani sor konvergens, azaz $|x+1|<\frac{1}{3}$, vagyis $x\in(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$ esetén. Itt $f(x)=\int\frac{3}{-2-3x}+\frac{2}{-1-2x}\,dx=-\ln(-2-3x)-\ln(-1-2x)+C$, és az $x=-1$ behelyettesítéséből kapjuk, hogy $C=0$, vagyis a sor összegfüggvénye $-\ln(2+3x)(1+2x)\quad(x\in(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}))$.

d) Ez felbontható egy mértani sor és egy $\sum nx^n$ típusú sor összegére. Az utóbbi összege

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},\text{ ha } |x|<1.$$

Ebből $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+ni)(iz)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(iz)^n+i\sum_{n=0}^{\infty}n(iz)^n=\frac{1}{1-iz}+i\frac{(iz)}{(1-iz)^2}=\frac{1-iz-z}{(1-iz)^2}$, ha $|iz|<1$, azaz $|z|<1$.