

1. Végezzük el az alábbi számításokat!

(9 pont)

a) Határozzuk meg az alábbi mátrix alapvető altereinek dimenzióját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\mathcal{S}(A)) = 3 \quad \dim(\mathcal{O}(A)) = 3 \\ \dim(\mathcal{N}(A)) = 2 \quad \dim(\mathcal{N}(A^T)) = 0$$

b) Tegyük fel, hogy a 4×4 -es A mátrixra $\det(A) = 4$. Ekkor $\det(A^{-2}) = \frac{1}{16}$ $\det(2A) = 64$

c) Ismerjük egy paraméteres egyenletrendszer bővített mátrixának egy lépcsős alakját. A paraméterek milyen értékei esetén lesz az egyenletrendszernek 0, 1 vagy végtelen sok megoldása.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 2b & 2 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0: b=0 \\ \infty: a=1 \\ 1: b \neq 0 \text{ és } a \neq 1 \end{array}$$

d) A Cramer-szabállyal határozzuk meg az $Ax = b$ egyenletrendszer x_3 ismeretlenének értékét, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 2$$

e) Írjuk föl a tér z -tengely körüli 60° -os forgatásának mátrixát!

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Igaz, vagy is hamis? I/H (jó válasz = +1, rossz válasz = -1 pont, az összpontszám nem lehet negatív) (10 pont)

Ha egy n -ismeretlenes egyenletrendszer három egyenletről áll, akkor az oszlopmodell szerint pontosan akkor oldható meg tetszőleges jobb oldal esetén, ha a vektoregyenlet bal oldalán szereplő vektorok közt van három lineárisan független. ☐

Különböző mátrixoknak különböző a redukált lépcsős alakjuk. ☐

Elemi sorműveletek közben az oszloptér nem változik. ☐

Egy lineáris egyenletrendszer nem konzisztens (nincs megoldása), ha több egyenletről áll, mint ahány ismeretlenes. ☐

Ha egy 8-ismeretlenes egyenletrendszer csak 5 egyenletről áll, akkor végtelen sok megoldása van. ☐

A valós $A_{m \times n}$ mátrix sortere altere $\mathbb{R}^n$ -nek. ☐

Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak. ☐

Az $[A|b]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha b benne van A oszloptérben. ☐

Ha $AB = O$, akkor $A = O$ vagy $B = O$. ☐

Ha $AB = AC$, akkor $B = C$. ☐

Név: _____ Gyakvez.: _____

3. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét elemi sorműveletekkel! (4 pont)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

tehát az inverz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Az A lineáris leképezés mátrixa a $B = \{(1,0), (2,1)\}$ bázisra vonatkozóan:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel e leképezés standard bázisra vonatkozó A_E mátrixát! (5 pont)

$$A_E = X_{E \leftarrow B} A_B Y_{B \leftarrow E}, \text{ ahol}$$

$$Y_{B \leftarrow E} = X_{E \leftarrow B}^{-1} \text{ és}$$

$$X_{E \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(6 pont)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

v_1 és v_2 egy bázis

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(4 pont)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$L \underline{U_x} = \underline{b} \Leftrightarrow L \underline{y} = \underline{b} \ \& \ U_x = \underline{y}$$

$$Ly = b : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \leadsto y = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ux = y, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

That $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. Az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 4 sajátértékéhez tartozó saját-

(4 pont)

$\lambda = 4$ -es faktoró sajátalber: $\pm \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $\lambda = 1$ -es " " " $u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{logy } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tehat as ortogonalis basis:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(8 pont)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -2 & -3-\lambda & -4 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(3+\lambda)(1-\lambda) - 4 - 4 \\ -4\lambda + 2(3+\lambda) + 2(1-\lambda) \\ = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda \\ = -\lambda(\lambda+1)^2$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = -1$$

$$\lambda_1 = 0: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} y=-2z \\ x=z \end{array}$$

$$\rightarrow z \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1 : \begin{bmatrix} +1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + y + 2z = 0 \rightarrow$$

$$x = -y - 2z \rightarrow \begin{bmatrix} -y-2z \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$