MAT A2a – 1. pótZH. – 2015-05-11 Neptun ________ Név ______________________ BG HE KS MT MZ PK h8 10 k sz8 10 2 cs8 2 p8 12

1. *Feleletválasztás:* Mely válasz(ok) helyes(ek) az alábbi kérdésekre? A helyes választ/válaszokat egy X-szel jelöljük meg, a helytelent hagyjuk üresen! (Helyes kitöltés egy kérdésre 2 pont, minden hiba -1 pont, negatív pont nem kapható.)

1. Legyen $\mathbf{A}$ egy valós 4×6-os mátrix.
   - (a) Ha $\mathbf{A}$ rangja 3, akkor sorterének és nullterének dimenziója is 3. ☐
   - (b) Tetszőleges $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^4$ esetén az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. ☐
   - (c) $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ rangja 1. ☐
2. Hogyan változnak elemi sorműveletek közben a sor- és oszlopterek?
   - (a) A sortér nem változik. ☐
   - (b) A sortér sorai közti lineáris kapcsolatok nem változnak. ☐
   - (c) Az oszloptér nem változik. ☐
   - (d) Az oszloptér oszlopai közti lineáris kapcsolatok nem változnak. ☐
3. Melyek helyesek az alábbi mátrixműveletekre vonatkozó tulajdonságok közül?
   - (a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ is azonos méretű négyzetes valós mátrixok. ☐
   - (b) Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, akkor vagy $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, vagy $\mathbf{B} = \mathbf{O}$. ☐
   - (c) Ha $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$ és $\mathbf{C}$ invertálható, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. ☐
4. Egy $n \times n$-es valós mátrix determinánsának értéke nem változik, ha
   - (a) első $n-1$ sorának egy tetszőleges lineáris kombinációját kivonjuk az utolsó sorból. ☐
   - (b) az első három sorát fölcseréljük úgy, hogy a 2-dik kerüljön az első, a 3-adik sor a második, és az első sor a harmadik helyére. ☐
   - (c) az első négy sorát fölcseréljük úgy, hogy a 2-dik kerüljön az első, a 3-adik sor a második, a 4-edik sor a harmadik és az első sor a negyedik helyére. ☐
5. Mely állítások igazak egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra?
   - (a) Ha egy mátrix diagonalizálható, és csak két sajátértéke van: 2 és 3, akkor diagonális alakjában csak 2-esek és 3-asok szerepelhetnek. ☐
   - (b) $\mathbf{A}$ pontosan akkor diagonalizálható, ha van n független sajátvektora. ☐
   - (c) $\mathbf{A}$ pontosan akkor szimmetrikus mátrix, ha $\mathbf{R}^n$-ben van olyan $\mathcal{B}$ ortonormált bázis, melyben az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés mátrixa diagonális. ☐

2. Az a paraméter értékeitől függően hány megoldása lehet az alábbi bővített mátrixú egyenletrendszernek? *(3 pont)*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 4 & 2 \\ 0 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{array}\right]$$

M: 0: $a = -1$ vagy $a = 2$; ∞: $a = 0$; 1: minden más esetben.

3. Számítsuk ki az

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értékét! *(4 pont)*

M: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$

4. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázist, ahol

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egy lineáris leképezés e bázisvektorokat a következőképp transzformálja: $\mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_3 \mapsto 2\mathbf{b}_3$. Írjuk föl a leképezés mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban és a standard bázisban! *(9 pont)*

M: A leképezés mátrixa:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az áttérés mátrixa

$$\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{A}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Válasszunk ki a $\mathbf{v}_1 = (1,2,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,3,0,0)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,1,1)$, $\mathbf{v}_4 = (1,0,1,2)$ vektorok közül néhányat, melyek a négy vektor által kifeszített altérnek egy bázisát alkotják, és írjuk fel mind a négy vektor e bázisra vonatkozó koordinátás alakját! *(6 pont)*

M: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, így $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. A koordinátás alakok: $(\mathbf{v}_1)_{\mathcal{B}} = (1,0,0)$, $(\mathbf{v}_2)_{\mathcal{B}} = (0,1,0)$, $(\mathbf{v}_3)_{\mathcal{B}} = (0,0,1)$, $(\mathbf{v}_4)_{\mathcal{B}} = (1,-1,1)$.

6. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix LU-felbontását! Ezt fölhasználva oldjuk meg az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert! *(10 pont)*

M: $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ megoldása $\mathbf{y} = (2, -2, -6)$, $\mathbf{x} = (4, -1, -2)$.

7. Határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátaltereinek egy-egy bázisát! *(8 pont)*

M: Karakterisztikus polinom: $-\lambda(\lambda-1)^2$, a sajátértékek $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$, a 0-hoz tartozó altér egy bázisa: $\{(1,-1,2)\}$, az 1-hez tartozó egy bázisa: $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$.