MatA2a – 2. pót-ZH. – 15-05-11. Neptun ____________ Név ________________________________ BG HE KS MT MZ PK
h8 10 k sz8 10 2 cs8 2 p8 12

1. Az integrálkritériumot használva döntsük el, hogy konvergens vagy divergens az alábbi sor? *(5 pont)*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3 n}$$

M:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3 n} \quad \rightsquigarrow$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \, dx = \left[\frac{\ln^{-2} x}{-2} \right]_1^{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{-2} \ln^{-2} x - \frac{1}{-2} \ln^{-2} 2$$

$$= 0 - \frac{1}{-2} \ln^{-2} 2 \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad \text{konv.}$$

2. Tagonkénti integrálással határozza meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

hatványsor $f(x)$ összegfüggvényét! Konvergens-e a sor az $x = 1$ és az $x = -1$ pontokban? *(6 pont)*

M:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} + c = \frac{x}{1-x} + c, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\left(\frac{x}{1-x} + c \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

Divergenciakritérium:

$$(n+1), (n+1)(-1)^n \not\to 0 \quad \rightsquigarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1), \ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n \text{ nem konv.-ek}$$

3. Írja fel az $f(x) = e^{-x^2}$ függvény nulla körüli Taylor-sorának (MacLaurin-sorának) első 4 nemnulla tagját tartalmazó részletösszegét! *(4 pont)*

M: $f(x) = e^{-x^2} \sim 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!}$

4. Határozza meg az $f(x, y, z) = 2x^5 + \frac{1}{2} y^2 + z^3$ függvény lineáris közelítéssel nyert értékét a $P(1.02, 0.99, 1.01)$ pontban az $(1, 1, 1)$-beli függvényérték felhasználásával! *(5 pont)*

M:

$$f(1, 1, 1) = 2 + \frac{1}{2} + 1 = 3.5$$

$$\nabla f(x, y, z)|_{(1,1,1)} = (10x^4, y, 3z^2)|_{(1,1,1)} = (10, 1, 3)$$

$$f(1.01, 0.98, 1.02) \approx 3.5 + (10, 1, 3) \cdot (0.02, -0.01, 0.01) = 3.72$$

5. Fejtse Fourier-sorba a 2π szerint periodikus f függvényt, ahol *(7 pont)*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [-\pi, 0] \\ 2, & \text{ha } x \in (0, \pi] \end{cases}$$

M: A függvény páratlan, ha kivonunk belőle 1-et, ezért $a_0 = 1$ (de ki is számolhatjuk), és $a_n = 0$, ha $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi}$$

$$f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} (-1)^{n+1} \sin(nx)$$

6. Írja fel az

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x + \cos y \\ x + \sin y \\ e^z \end{bmatrix}$$

leképezés Jacobi-mátrixát! *(4 pont)*

M:

$$\mathbf{J}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & -\sin y & 0 \\ 1 & \cos y & \\ 0 & 0 & e^z \end{bmatrix}$$

7. Határozza meg a $z^3 = x^5y^2$ egyenlettel megadott felület $P(1,1,1)$ ponthoz tartozó érintősíkjának egyenletét! *(6 pont)*

M: $F(x,y,z) = x^5y^2 - z^3 \rightsquigarrow \nabla F(x,y,z)|_{(1,1,1)} = (5x^4y^2, 2x^5y, -3z^2)|_{(1,1,1)} = (5,2,-3) \rightsquigarrow 5(x-1) + 2(y-1) - 3(z-1) = 0$

8. Határozza meg az $f(x,y,z) = 2x^2+2y^2+xy+z^2$ függvény lokális szélsőértékeinek helyét és értékét! *(8 pont)*

M: A parciális deriváltak értéke 0: $4x+y=0$, $4y+x=0$, $2z=0 \rightsquigarrow (x,y,z)=(0,0,0)$ A második parciális deriváltak mátrixa

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a vezető főminorok értékei $4>0$, $15>0$, $30>0 \rightsquigarrow$ MIN.

9. Határozza meg az

$$\int_0^1 \int_0^1 x e^{x^2} y^2 e^{y^3} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

integrál értékét! *(5 pont)*

M: $\int_0^1 \int_0^1 x e^{x^2} y^2 e^{y^3} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} \, \mathrm{d}x\right) \left(\frac{1}{3} \int_0^1 3y^2 e^{y^3} \, \mathrm{d}y\right) = \frac{1}{6}(e-1)^2$