MAT A2b – 1. pótZH. – 2013. május 10. Név: ______________________ Gyakvez.: ______

1. Végezzük el az alábbi számításokat! *(9 pont)*

a) Határozzuk meg az alábbi mátrix alapvető altereinek dimenzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) = \dots$ $\qquad \dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) = \dots$

$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dots$ $\qquad \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)) = \dots$

b) Tegyük fel, hogy a 4×4-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\det(\mathbf{A}) = 4$. Ekkor $\det(\mathbf{A}^{-2}) = \dots$ $\qquad \det(2\mathbf{A}) = \dots$

c) Ismerjük egy paraméteres egyenletrendszer bővített mátrixának egy lépcsős alakját. A paraméterek milyen értékei esetén lesz az egyenletrendszernek 0, 1 vagy végtelen sok megoldása.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 2b & 2 \\ 0 & 0 & b & 1 \end{array}\right]$$

d) A Cramer-szabállyal határozzuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer x_3 ismeretlenének értékét, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e) Írjuk föl a tér z-tengely körüli $60°$-os forgatásának mátrixát!

2. Igaz, vagy is hamis? I/H (jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont, az összpontszám nem lehet negatív) *(10 pont)*

Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer három egyenletből áll, akkor az oszlopmodell szerint pontosan akkor oldható meg tetszőleges jobb oldal esetén, ha a vektoregyenlet bal oldalán szereplő vektorok közt van három lineárisan független. ☐

Különböző mátrixoknak különböző a redukált lépcsős alakjuk. ☐

Elemi sorműveletek közben az oszloptér nem változik. ☐

Egy lineáris egyenletrendszer nem konzisztens (nincs megoldása), ha több egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes. ☐

Ha egy 8-ismeretlenes egyenletrendszer csak 5 egyenletből áll, akkor végtelen sok megoldása van. ☐

A valós $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix sortere altere $\mathbf{R}^n$-nek. ☐

Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak. ☐

Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ benne van $\mathbf{A}$ oszlopterében. ☐

Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ vagy $\mathbf{B} = \mathbf{O}$. ☐

Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. ☐

3. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét elemi sorműveletekkel! *(4 pont)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Az A lineáris leképezés mátrixa a $\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$ bázisra vonatkozóan:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel e leképezés standard bázisra vonatkozó $\mathbf{A}_{\mathcal{E}}$ mátrixát! *(5 pont)*

5. Válasszunk ki a $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -4, -1)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 3, 2, 2)$ vektorok által kifeszített altérből egy bázist, és írjuk fel az összes vektor e bázisra vonatkozó koordinátás alakját! *(6 pont)*

6. Ismerjük az $\mathbf{A}$ mátrix alábbi LU-felbontást! Segítségével oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ahol *(4 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

7. Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 4 sajátértékéhez tartozó sajátvektora $(1, 1, 1)$, az 1 sajátértékhez tartozó két sajátvektora $(-1, 0, 1)$ és $(-1, 1, 0)$. Ennek alapján írjuk fel a mátrix összes sajátvektorát a sajátaltereik megadásával. Kiválasztható-e az $\mathbf{A}$ mátrix sajátvektorai közül egy ortogonális bázis? Ha igen válasszunk ki egyet! *(4 pont)*

8. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltereket! *(8 pont)*