MAT A2 – 1. pót-ZH. – 2011. május 6. Név: ______________________ Gyakvez.: ______

1. Végezzük el az alábbi számításokat! *(10=22123 pont)*

a) Határozzuk meg az alábbi mátrix alapvető altereinek dimenzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) = \ldots$ $\quad \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \ldots$
$\dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) = \ldots$ $\quad \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)) = \ldots$

b) Tegyük fel, hogy a 3×3-as $\mathbf{A}$ mátrixra $\det(\mathbf{A}) = -2$. Ekkor $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \ldots$ $\quad \det(3\mathbf{A}) = \ldots$

c) Számítsuk ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \ldots$$

d) Ha az $\mathbf{A}$ egy $p \times q$-s mátrix, és sorterének dimenziója k, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszerben a szabad változók száma $= \ldots$, a nulltér dimenziója $= \ldots$

e) Mi az $\mathbf{A}$ mátrix inverzében az első sor harmadik eleme, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}?$$

2. Az alábbiak közül melyik állítás igaz? (I/H, pontozás jó válasz $= +1$, rossz válasz $= -1$ pont, de az összpontszám nem lehet negatív) *(7 pont)*

Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi nemzérus sor van. ☐

Különböző mátrixoknak különböző a redukált lépcsős alakjuk. ☐

Egy lineáris egyenletrendszer nem konzisztens (nincs megoldása), ha több egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes (más szóval, ha túlhatározott). ☐

Minden homogén lin. egyenletrendszer megoldható. ☐

Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak. ☐

Rögzített $\mathbf{A}$ mátrix mellett azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer megoldható, alteret alkotnak. ☐

Az n-ismeretlenes $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$. ☐

3. Hozzuk LU-alakra az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot, és ezt felhasználva oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert a $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ vektorral! *(8 pont)*

4. A $\mathbf{v} = (1, 5)$ vektor $\mathcal{B} = \{(1, -1), \mathbf{b}\}$ bázisra vonatkozó koordinátavektora $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Mi a $\mathbf{b}$ vektor? *(4 pont)*

5. Adjuk meg az összes, és a legkisebb abszolútértékű megoldását a következő egyenletrendszernek! *(6 pont)*

$$\begin{aligned} -x + 3y + z &= -1 \\ x + y + 3z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

6. A Cramer-szabály szerint mi az alábbi egyenletrendszer megoldásában a z értéke, ha az egyenletrendszer egyértelműen megoldható? *(4 pont)*

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ bx + az &= a \\ ay + bz &= b \end{aligned}$$

7. A b és c milyen értékére van 0, 1, illetve végtelen sok megoldása az alábbi egyenletrendszernek? Abban az esetben, amikor végtelen sok megoldása van, adjuk is meg a megoldásokat! *(6 pont)*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & c \\ 1 & 1 & 2 & c \end{array}\right]$$

8. Válasszunk ki a $\mathbf{v}_1 = (1,0,2,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,-1,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,-1,3,2)$, $\mathbf{v}_4 = (1,2,0,-1)$, $\mathbf{v}_5 = (1,1,1,1)$ vektorok közül maximális számú függetlent, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként! *(5 pont)*