1. MAT A2 vizsga. 2013-05-30 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat valamely tanult tétel állításának megfelelően! *(13 pont)*

a) Az alábbi állítások ekvivalensek az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra: (1) A homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \ldots$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. (2) $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) \ldots n$. (3) $\det(\mathbf{A}) \ldots 0$. (4) $\mathbf{A}$ lineárisan független oszlopvektorainak száma ...

b) A dimenziótétel szerint bármely $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix esetén:

c) Minden négyzetes ...
mátrix sajátértékei valós számok és sajátvektorai...

d) Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathbf{A}$ sajátalterei dimenziójóinak összege ...

e) Egy $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés az $\mathbf{e}_i$ bázisvektort az $\mathbf{c}_i$ vektorba képzi ($i = 1, \ldots, \ldots$). Ekkor egyetlen olyan $\mathbf{C}$ mátrix létezik, melynek mérete $\cdots \times \ldots$, és amelyre bármely $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ vektor esetén $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Cx}$. E mátrix alakja: $\mathbf{C} = \ldots$

f) Ha az $f(x, y)$ első és második parciális deriváltjai folytonosak egy (a, b) középű körlapon, $f_x(a, b) = f_y(a, b) = \ldots$, és
...

akkor f-nek (a, b)-ben lokális minimuma van.

g) Ha egy számsorozat monoton növekvő és ...
akkor konvergens is.

h) Az $f(x, y)$ függvény grafikonja érintősíkjának normálvektora az (a, b) helyen:

2. Igaz, vagy hamis? I/H (jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont, az összpontszám nem lehet negatív) *(8 pont)*

Egy lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, ha több egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes. ☐

Egy lineáris transzformáció lineárisan független vektorokat lineárisan független vektorokba visz. ☐

Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ négyzetes mátrixok és $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, akkor $\det(\mathbf{A})$ vagy $\det(\mathbf{B})$ nulla. ☐

Egy tetszőleges $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezésre igaz, hogy bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ vektor és tetszőleges $c \in \mathbf{R}$ esetén $A(\mathbf{x} + c\mathbf{y}) = A\mathbf{x} + c\mathbf{Ay}$. ☐

Ha f és f' szakaszosan folytonosak a $[0, 2\pi]$ intervallumon, és f-nek c szakadási helye, akkor f Fourier-sora konvergens c-ben, és egyenlő $(f(c^+) + f(c^-))/2$-vel. ☐

Ha $\lim_{n\to\infty} x_n = y$, és f folytonos az y helyen, akkor $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)$. ☐

Ha egy hatványsor konvergens egy I intervallum minden pontjában, akkor a tagonkénti deriválással kapott sor is konvergens I minden pontjában. ☐

Ha a kétváltozós f függvény parciálisan differenciálható az (a, b) helyen mindkét változója szerint, akkor folytonos is e pontban. ☐

3. Írjuk fel szumma-jelek segítségével az alábbi mátrixszorzat értékét! *(1 pont)*

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

4. Egy $2p$ szerint periodikus páratlan függvény Fourier-sorának alakja *(1 pont)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \ldots x,$$

ahol $b_n = \ldots$

5. Határozzuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait! *(4 pont)*

6. Fejezzük be az alábbi definíciókat: *(7 pont)*

1. Determinánson olyan függvényt értünk, mely egy $n \times n$-es valós mátrixhoz számot rendel, és amely

2. Az $f(x, y)$ függvénynek az (a, b) pont nyeregpontja, ha ... (a, b)-középű ...

3. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sort Leibniz-sornak nevezzük, ha

7. Mutassuk meg, hogy ha **A** és **B** hasonlóak, akkor karakterisztikus polinomjaik azonosak. *(4 pont)*

8. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ sor konvergens, ha $p > 1$. *(4 pont)*

9. Mely intervallumon konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ sor? *(4 pont)*

10. Egy origó közepű gömbből vágjunk ki egy olyan kúppalást által határolt tartományt, amelynek csúcsa az origó, fél nyílásszöge pedig 60 fokos! Hányadrésze e kivágott rész térfogata a gömbének? *(4 pont)*