1. MAT A2 vizsga. 2015-05-28 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________________

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat valamely tanult tétel állításának megfelelően! *(12 pont)*

a) Az alábbi állítások ekvivalensek az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra: (1) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek van megoldása.
(2) $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) =$ _____
(3) $\mathbf{A}$ oszloptere tartalmazza _____

b) Legyen $\mathbf{A}$ $m \times n$-es mátrix. Ekkor ha $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ a mátrix nulltere, akkor $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) =$ _____

c) Minden négyzetes $n \times n$-es, valós, szimmetrikus mátrix komplex, nem valós sajátértékei száma _____. A valós sajátértékeihez tartozó lineárisan független sajátvektorai száma _____

d) Legyen az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés mátrixa a standard bázisban az $\mathbf{A}$ mátrix, melynek oszlopvektorai, az $\mathbf{a}_i$ vektorok ($i = 1, \ldots,$ _____). Ekkor $\mathbf{Ae}_i =$ _____, ahol $\mathbf{e}_i$ az i-edik standard bázisvektor.

e) Legyenek az $f(x, y)$ első és második parciális deriváltjai folytonosak egy (a, b) közepű körlapon. Legyen (a, b) az f kritikus pontja, azaz ___________. Ha az f függvény (a, b)-beli ___

determinánsa negatív, akkor ___

f) Például a _____
numerikus sor konvergens, de nem abszolút konvergens.

g) Az $f(x, y)$ függvény grafikonja $(a, b, f(a, b))$ pontbeli érintősíkjának egyenlete: ___

h) Egy 2π szerint periódikus *páratlan* függvény Fourier-sorának általános alakja: ___

2. Igaz, vagy hamis? I/H (jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont, az összpontszám nem lehet negatív) *(8 pont)*

Egy mátrix sajátértékei elemi sorműveletek alkalmazása után nem változnak. ☐

Egy lineáris transzformáció összefüggő vektorokat összefüggő vektorokba visz. ☐

Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ négyzetes mátrixok és $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{A}$ vagy $\mathbf{B}$ nulla mátrix. ☐

Ha egy $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy hova viszi egy $\mathbf{R}^n$-beli bázis elemeit, akkor minden vektor képét meg tudjuk határozni. ☐

A $\sin 2x$ függvény Fourier-sora mindenütt konvergens. ☐

A $\mathrm{sgn}(x)\,\mathrm{sgn}(y)$ függvény a $(0, 0)$-ben folytonos. ☐

Hatványsor deriváltsorának konvegencia-sugara kisebb, mint az eredeti, soré. ☐

Ha a kétváltozós f függvény (totálisan) differenciálható az (a, b) helyen, akkor folytonos is e pontban. ☐

3. Adjunk meg egy 2×2-es valós szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot, hogy $x^2 + 2xy + y^2 = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Ax}$ legyen, ahol $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. *(1 pont)*

4. Határozzuk meg, a $\cos(2x)$ Fourier-sorának konstans tagját! *(1 pont)*

5. Határozzuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, sajátaltereit és azok egy-egy bázisát! *(4 pont)*

6. Fejezzük be az alábbi definíciókat: *(7 pont)*

1. Egy **A** mátrix karakterisztikus polinomja ___

2. Az $f(x, y)$ függvény az (a, b) pontban (totálisan) differenciálható, ha ___

3. q kvóciensű geometriai sornak nevezzük a ___________ sort. Ez pontosan akkor konvergens, ha ___________

7. Mutassuk meg, hogy hasonló mátrixok determinánsa megegyezik. *(4 pont)*

8. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ sor divergens, ha $0 < p < 1$. *(4 pont)*

9. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét az alábbi integrálban: *(5 pont)*

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

10. Egy origó középű 1 sugarú gömbből vágjuk ki a $x^2 + y^2 = 1/4$ henger által határolt tartományt. Mekkora lesz a maradék test (hengeren kívüli rész) térfogata? (Készítsen ábrát! Az egységgömb térfogata $\frac{4}{3}\pi$.) *(4 pont)*