2. MAT A2 vizsga. 2011-05-31 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ____________________

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, hogy igazak legyenek! *(18 pont)*

a) a legjobb közelítés tétele szerint ha $\mathbf{x}$ az $\mathbf{R}^n$ tér egy vektora és ... akkor $\mathbf{x}$-nek egyetlen legjobb közelítése van ...-ben, és az egyenlő ...

b) A dimenziótétel szerint bármely $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix esetén:

c) Legyen $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ az $\mathbf{R}^n$ két altere. Az alábbi állítások közül melyikből melyik következik?
A: $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek. *B:* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$. *C:* $\mathbf{R}^n$ minden vektora egyértelműen előáll egy $\mathcal{V}$- és egy $\mathcal{W}$-beli vektor összegeként.
Írjuk a $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ vagy $\Longleftarrow$ jelek valamelyikét a betűk közé:

$A \quad \ldots \quad B \quad \ldots \quad C \quad \ldots \quad A$

d) A differenciálható $f(x, y, z)$ függvény $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ irányú (x_0, y_0, z_0) pontbeli iránymenti deriváltjának értéke egyenlő...

e) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy $n \times n$-es valós mátrix diagonalizálható legyen az, hogy a ...

f) A kétváltozós f függvény másodrendű parciális deriváltjaira vonatkozó $f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$ egyenlőség fennállásának elégséges feltétele, hogy ...

g) Bontsuk fel az alábbi determinánst nem zérus értékű kígyók determinánsainak összegére (a determinánsok értékét nem kell kiszámolni):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

h) Az inhomogén, n-ismeretlenes, n egyenletből álló $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer pontosan akkor nem oldható meg egyértelműen, ha $\det(\mathbf{A}) \ldots$ 0, ami azzal ekvivalens, hogy $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) \ldots$ n, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ oszlopvektorai közt a lineárisan függetlenek száma ...

i) A gömbi (ρ, ϕ, θ) koordinátákra való áttérés Jacobi-determinánsa:

j) Tekintsük az $(1, 1, 1)$ normálvektorú síkra való merőleges vetítés geometriai transzformációját. E lineáris leképezés képterének dimenziója ... , magterének dimenziója ... . E leképezés sajátértékei: ...
A leképezés sajátaltereit megadó egyenlet(rendszer)ek:

2. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét (az integrálás sorrendjének megcserélésével)! *(4 pont)*

$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

3. Számítsuk ki az alábbi integrált polárkoordinátákra való áttéréssel: *(4 pont)*

$$\int_{-a}^0 \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

4. Írjuk fel az origó középű egységgömb-felület egyenletét henger és gömbi koordinátarendszerben! Az egyenletben nem szereplő változókhoz adjunk meg értelmezési tartományukat. *(4 pont)*

5. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, akkor karakterisztikus polinomjaik azonosak. *(6 pont)*

6. Mutassuk meg, hogy a kétváltozós f függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságából következik folytonossága! *(4 pont)*

7. Oldjuk meg LU-felbontással, majd Cramer-szabállyal az alábbi egyenletrendszert! *(5 pont)*

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 4x + y &= 6 \end{aligned}$$

8. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek $\mathbf{x} = (2/3, 4/3, -2/3)$ egy minimális abszolút értékű optimális megoldása, ahol *(6 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

9. Írjuk fel szumma-jelek segítségével az alábbi mátrixszorzat értékét! *(3 pont)*

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

10. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix diagonális alakját, és adjunk meg egy sajátvektorokból álló ortogonális bázist (nem kell ortonormáltat)! *(6 pont)*