2. MAT A2 vizsga. 2013-06-06 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________________

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat valamely tanult tétel állításának megfelelően! *(11 pont)*

a) A 3×3-as $\mathbf{A}$ mátrix első sorának 2-szeresét adjuk a 3-dik sorhoz. E művelet elvégezhető egy mátrixszorzással:

b) Az alábbi állítások ekvivalensek az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra:
(1) Az inhomogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható. (2) $\operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \ldots$
(3) $\mathbf{A}$ és $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ redukált lépcsős alakjában a nemnulla sorok száma egyaránt ...

c) A dimenziótétel szerint bármely $p \times q$-as $\mathbf{C}$ mátrix esetén:

d) Az $f(x, y, z, w) = x^3 + yz + w$ függvény gradiense a $P(1, 0, 1, 1)$ pontban ... , az $\mathbf{a} = (2, 1, 2, 4)$ irányú P pontbeli iránymenti deriváltjának értéke ...

e) Minden valós négyzetes ...
mátrix sajátértékei valós számok és sajátvektorai...

f) Ha az A lineáris leképezés mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{B}$, továbbá a $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$ bázisra való áttérés mátrixa $\mathbf{X}$, akkor az A leképezés $\mathcal{C}$ bázisbeli $\mathbf{C}$ mátrixa kifejezhető $\mathbf{B}$ és $\mathbf{X}$ segítségével, nevezetesen $\mathbf{C} = \ldots$

g) Az $(1 + x)^v$ függvény hatványsora, vagyis a binomiális sor ...

ahol $\binom{v}{k} = \ldots$

2. Igaz, vagy hamis? I/H (jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont, az összpontszám nem lehet negatív) *(7 pont)*

Van olyan $\mathbf{B}$ mátrix, mely hasonló az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixhoz, és $\det(\mathbf{B}) = 5$. ☐

Egy lineáris egyenletrendszernek nem lehet csak egyetlen megoldása, ha több egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes. ☐

Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ négyzetes mátrixok és $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{A}$ vagy $\mathbf{B}$ nullmátrix. ☐

Egy tetszőleges $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineáris leképezés alteret altérbe visz, így a nullvektort a nullvektorba viszi. ☐

Ha f és f' szakaszosan folytonosak a $[0, 2\pi]$ intervallumon, és f-nek c szakadási helye, akkor f Fourier-sora konvergens c-ben, és egyenlő $(f(c^+) + f(c^-))/2$-vel. ☐

Ha egy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergens az a és b pontot is tartalmazó nyílt I intervallumon, akkor
$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$ ☐

Ha a kétváltozós f függvény parciális deriváltjai léteznek és folytonosak az (a, b) egy $\varepsilon > 0$ sugarú környezetében, akkor f differenciálható is ebben a pontban. ☐

3. Végezzük el az alábbi számítási feladatokat: *(14 pont)*

(Vandermonde)

a) $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} =$$

b) Írjuk fel a sík pontjait az $y = -x$ egyenesre tükröző leképezés standard mátrixát!

c) Konvergens-e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)^n}$ sor? (gyökkritérium)

d) Diagonalizálható-e a $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix?

e) Írjuk fel a 2π szerint periodikus f függvény Fourier-sorának első 2 nemzérus tagját, pontosabban a sor első 2 tagját tartalmazó részletösszegét, ahol $f(x) = 1$, ha $x \in (0, \pi/3)$, $f(x) = -1$, ha $x \in (-\pi/3, 0)$, és $f(x) = 0$ a $[-\pi, \pi]$ intervallum többi pontjában.

4. Írjuk fel a hengerkoordinátáknál használt $(r, \theta, z) \mapsto (x, y, z)$ leképezés deriváltjának mátrixát! *(2 pont)*

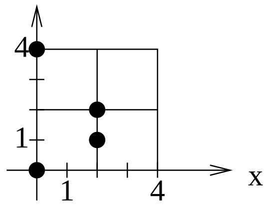
5. Fejezzük be az alábbi definíciókat: *(4 pont)*

1. $\mathbf{R}^n$ egy $\mathcal{V}$ alterének dimenzióján

   számát értjük.

2. Az $f(x, y)$ függvénynek az (a, b) pontban minimuma van, ha ... (a, b)-közepű ...

6. A kettősintegrál definíciója alapján írjuk fel az $f(x, y) = x + y$ függvénynek az ábrán látható tartomány megadott beosztásához és reprezentánsrendszeréhez tartozó integrálközelítő összegét, és a beosztás normáját (finomságát). *(3 pont)*



7. Mutassuk meg, hogy minden négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix felbomlik egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegére. *(2 pont)*

8. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges valós mátrix sortere és nulltere merőleges egymásra. *(3 pont)*

9. Igazoljuk, hogy ha a kétváltozós f függvény differenciálható az (a, b) pontban, akkor ott folytonos is. *(4 pont)*