2. MAT A2 vizsga. 2015-06-04 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ____________________

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat valamely tanult tétel állításának megfelelően! *($11_{1212113}$ pont)*

a) A 3×3-as $\mathbf{A}$ mátrix második sorának 5-szeresét adjuk az első sorhoz. E művelet elvégezhető a következő mátrixszal való szorzással:

b) Az alábbi állítások ekvivalensek az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra:

(1) Az inhomogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg.
(2) $\mathrm{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ _____
(3) $\mathbf{A}$ és $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ redukált lépcsős alakjában a nemnulla sorok száma _______

c) A dimenziótétel szerint, bármely $p \times q$-as $\mathbf{C}$ mátrix esetén, ha $\mathbf{C}$ nulltere k dimenziós, akkor oszloptere _____ -dimenziós.

d) Az $f(x, y, z, w) = x^2 + xyz + xw$ függvény gradiense a $P(-1, 0, 1, 2)$ pontban _____ , az $\mathbf{a} = (1, 1, -1, -1)$ irányú P pontbeli iránymenti deriváltjának értéke _____

e) Ha egy 2×2-es, valós, szimmetrikus mátrixnak $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sajátvektora, akkor sajátvektora a következő egységvektor is:

f) Ha a $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$ bázisra való áttérés mátrixa $\mathbf{X}$, akkor az $\mathcal{C}$ bázisról a $\mathcal{B}$ bázisra való áttérés mátrixa ___

g) Az $(1 + x)^{1/2}$ függvény hatványsora, mint binomiális sor:

ahol $\binom{1/2}{k} =$ ___
Ennek konvergenciasugara _____

2. Igaz, vagy hamis? I/H (jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont, az összpontszám nem lehet negatív) *(7 pont)*

Minden olyan $\mathbf{B}$ mátrixra $\det(\mathbf{B}) = 6$, mely hasonló az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixhoz. ☐

Ha $\mathbf{v}$ sajátvektora az $\mathbf{A}$ mátrixnak, akkor sajátvektora a hozzá hasonló $\mathbf{B}$ mátrixnak is. ☐

Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ négyzetes mátrixok, akkor $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$. ☐

Lineáris leképezés-e az $A : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1; x \mapsto A(x) = ax + b$, ahol $a, b \in R$ tetszőleges valósok? ☐

Ha f és f' szakaszosan folytonosak a $[0, 2\pi]$ intervallumon, és f-nek c szakadási helye, akkor f Fourier-sora konvergens c-ben, és egyenlő $(f(c^+) + f(c^-))/2$-vel. ☐

A $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hatványsor tagonkénti integrálásával kapott sor konvergencia tartománya $[-2, 2]$. ☐

Az $f(x, y) = sgn(x)sgn(y)$ függvény a $(0, 0)$ pontban x-szerint parciálisan differenciálható és parciális deriváltja itt nulla. ☐

3. Végezzük el az alábbi számítási feladatokat: *(14_{21344} pont)*

(Vandermonde)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} =$

b) Írjuk fel a sík pontjait az $y = -x$ egyenesre merőlegesen vetítő leképezés mátrixát a standard bázisban!

c) Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}$ sor? A választ igazoljuk!

d) Diagonalizálható-e a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix?

e) Számítsuk ki az origó középpontú 2 sugarú gömb a $z = 1$ sík feletti részét alkotó gömbsüveg térfogatát. Készítsen ábrát!

4. Írjuk fel a síkbeli polár koordinátáknál használt $(r, \vartheta) \mapsto (x, y)$ leképezés deriváltjának mátrixát! *(2 pont)*

5. Fejezzük be az alábbi definíciókat: *(4 pont)*

(a) $\mathbf{R}^n$ egy bázisa egy olyan ___,
amely ___
és ___

(b) Az $f(x, y)$ függvénynek az (a, b) pontban lokális maximuma van, ha ___ (a, b)-közepű _____

6. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ sor divergens! *(2 pont)*

7. Bizonyítsa be a mátrixok szorzatának inverzéről szóló tételt! *(2 pont)*

8. Bizonyítsuk be, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak. *(3 pont)*

9. Az integrálás sorrendjének cseréjével számítsuk ki az alábbi integrált! *(5 pont)*

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 y e^{-x^2} \, dx \, dy.$$