2. MAT A2 vizsga. 2009-06-03 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________ Előadó: ______

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, hogy igazak legyenek! *(16 pont)*

a) Tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) pont olyan, hogy tetszőleges $\delta > 0$ esetén van olyan (x, y) pont, ami az f kétváltozós függvény értelmezési tartományához tartozik, és $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az (x_0, y_0) pontban van határértéke és az L, ha .... van olyan ...., hogy f értelmezési tartományának minden olyan (x, y) pontjára, amire
...
fennáll, hogy ...

b) Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha létezik egy olyan diagonális $\mathbf{D}$ és egy ... $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

c) Az

$$\begin{bmatrix} 1.2 & 2.3 & 3.4 & -4.5 \\ -3.1 & 1.0 & 0.1 & 2.1 \\ 2.1 & 0.0 & -1.9 & 1.7 \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixú egyenletrendszernél részleges főelemkiválasztás esetén a ... elemmel kezdjük a Gauss kiküszöbölést.

d) Tekintsük az $x + y + z = 0$ egyenletű síkot, és a rá való merőleges vetítés geometriai transzformációját. E leképezés sajátértékei: ...
a hozzájuk tartozó sajátvektorok (sajátalterek):...

e) Ha az n-ismeretlenes m egyenletből álló $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer nem oldható meg, akkor m, $\operatorname{rang}(\mathbf{A})$ és a kibővített mátrix rangja ($\operatorname{rang}(\mathbf{A}')$) között a következő összefüggések állnak fenn:

$$\operatorname{rang}(\mathbf{A}) \dots m, \quad \operatorname{rang}(\mathbf{A}) \dots \operatorname{rang}(\mathbf{A}')$$

f) Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara R, akkor az $x \in$ ... értékekre igaz az

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^k \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n (x-c)^k \right)'$$

összefüggés.

g) Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorrendszert lineárisan függőnek nevezzük, ha vannak olyan ...

h) *(Fubini-tétel)* Ha az $f(x, y)$ függvény ...
az $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$ tartományon, akkor az f függvény ezen téglalap feletti integrálja

2. Az alábbiak közül melyik állítás igaz? (I/H) *(5 pont)*

Az $\mathbf{A}$ lineárisan független sajátvektorainak száma legalább annyi, mint a különböző sajátértékeinek száma! ☐

Az $\mathbf{A}$ lineárisan független sajátvektorainak száma pontosan annyi, mint a különböző sajátértékeinek száma! ☐

Ha a kétváltozós f függvény első parciális deriváltjai léteznek az (x_0, y_0) pontban, akkor ott f folytonos is! ☐

Ha a kétváltozós f függvény első parciális deriváltjainak értéke a (x_0, y_0) pontban 0, akkor ott f-nek szélsőértéke van! ☐

Ha f-nek az (x_0, y_0) pontban léteznek az első parciális deriváltjai és ott szélsőértéke is van, akkor e parciális deriváltjainak értéke 0. ☐

3. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^4 = \mathbf{O}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{A}$ nem invertálható, de $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ igen, és $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3$. *(6 pont)*

4. Írjuk fel az $f(x, y) = x^2y^2 - x^3$ függvény $(1, 2)$ ponthoz tartozó lineáris közelítését és teljes differenciálját, valamint a $(0, 0)$ ponthoz tartozó másodfokú Taylor-polinomját! *(5 pont)*

5. Mutassuk meg, hogy egy **A** mátrix egy sajátértékéhez tartozó sajátvektorai alteret alkotnak! *(4 pont)*

6. Határozzuk meg annak a testnek a tömegét, melynek sűrűségfüggvénye $f(x,z,y) = x^2+y^2+z$, és amelyet a $z=0$ és $z=2$ egyenletű síkok és az $x^2+y^2=1$ egyenletű hengerfelület határolnak! Használjunk hengerkoordinátákat! *(5 pont)*

7. Tekintsük az $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}; (x,y) \mapsto xy$ és a $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2; (u,v) \mapsto (u+v, u-v)$ függvényeket! Honnan hová képez az $f \circ g$ függvény? Számítsa ki $f \circ g$ deriváltját kétféleképp is, a láncszabállyal és behelyettesítéssel! *(5 pont)*

8. Bizonyítsuk be, hogy $p > 1$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ sor konvergens! *(4 pont)*

9. Az összehasonlító és a hányadoskritérium alkalmazásával igazoljuk, hogy az alábbi sor konvergens! *(4 pont)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n! + \sqrt{n}}$$

10. Tekintsük azt a 2π szerint periódikus f függvényt, melyre $f(x) = x^2$, ha $x \in [-\pi, \pi]$. Kiszámolva a Fourier-együtthatókat, azt kapjuk, hogy

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Írjuk fel az f függvényhez tartozó Fourier-sort! E sor összege megegyezik-e minden x helyen az f függvénnyel? E Fourier-sort felhasználva határozzuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

sor összegét! *(6 pont)*