3. MAT A2 vizsga. 2011-06-07 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ____________________

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, hogy igazak legyenek! *(18 pont)*

a) Az $n \times n$-es valós mátrix determinánsán definíció szerint olyan függvényt értünk, mely:

b) a legjobb közelítés tétele szerint ha $\mathbf{x}$ az $\mathbf{R}^n$ tér egy vektora és ... akkor $\mathbf{x}$-nek egyetlen legjobb közelítése van ...-ben, és az egyenlő ...

c) írjuk fel az alábbi determináns második oszlopa szerinti kifejtését (kiszámolni nem kell):

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & 0 & f & g \\ h & 0 & i & j \\ 0 & k & m & n \end{vmatrix} =$$

d) A dimenziótétel szerint bármely $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix esetén:

e) A differenciálható $f(x,y,z)$ függvény $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ irányú (x_0,y_0,z_0) pontbeli iránymenti deriváltjának értéke egyenlő...

f) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy $n \times n$-es valós mátrix ortogonálisan diagonalizálható legyen az, hogy ...

g) A homogén lineáris $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha $\det(\mathbf{A}) \dots 0$, ami azzal ekvivalens, hogy $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) \dots n$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ oszlopvektorai közt a lineárisan függetlenek száma ...

h) Tegyük fel, hogy az (x_0,y_0) pont olyan, hogy tetszőleges $\delta > 0$ esetén van olyan (x,y) pont, ami az f kétváltozós függvény értelmezési tartományához tartozik, és $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az (x_0,y_0) pontban van határértéke és az L, ha .... van olyan ...., hogy f értelmezési tartományának minden olyan (x,y) pontjára, amire
...
fennáll, hogy
...

i) Tekintsük az $(1,1,1)$ normálvektorú síkra való tükrözés geometriai transzformációját. E lineáris leképezés képterének dimenziója ... , magterének dimenziója ... . E leképezés sajátértékei: ...
A leképezés sajátaltereit megadó egyenlet(rendszer)ek:

2. Ha $\mathbf{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, akkor az alábbi állítások közül melyek igazak, melyek hamisak (I/H)? *(3 pont)*

A: $\mathcal{V} \perp \mathcal{W}$ ☐

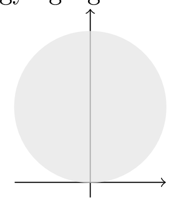
B: $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ ☐

C: $\mathcal{V} \cup \mathcal{W} = \mathbf{R}^n$ ☐

D: $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathbf{R}^n$ ☐

E: $\mathbf{R}^n$ minden vektora egyértelműen előáll egy $\mathcal{V}$ és egy $\mathcal{W}$-beli vektor összegeként. ☐

3. Írjuk fel a megadott integrál határait az ábrán látható egységsugarú köralakú tartomány esetén: *(3 pont)*



$$\int_{\dots}^{\dots} \int_{\dots}^{\dots} f(r,\theta)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$

4. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét (az integrálás sorrendjének megcserélésével)! *(5 pont)*

$$\int_0^3 \int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x =$$

5. Számítsuk ki az alábbi integrált gömbi koordinátákra való áttéréssel: *(5 pont)*

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2 + y^2 + z^2\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x =$$

6. Legyen $\mathbf{x}$ az R^n tér egy tetszőleges vektora, és $\mathcal{W}$ egy tetszőleges altere. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, akkor *(6 pont)*

$$|\mathbf{x} - \mathbf{w}| \geq |\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}|.$$

7. Igazoljuk a mátrix inverzének egyértelműségére vonatkozó tételt! *(4 pont)*

8. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + y^3 + 2xy - 3$ függvény összes szélsőértékhelyét és nyeregpontját! *(4 pont)*

9. Írjuk fel az alábbi mátrix LU-felbontását! *(2 pont)*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

10. Határozzuk meg az egyetlen egyenletből álló $x + 2y + 2z = 9$ egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását! *(4 pont)*

11. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátvektorai $(1, -2, -2)$, $(2, 2, -1)$, $(2, -1, 2)$, sajátértékei rendre 1, 1, 0. Van-e a mátrixnak sajátvektorokból álló ortonormált bázisa? Ha igen, adjunk meg egy ilyet! Mi ez az $\mathbf{A}$ mátrix? *(6 pont)*