3. MAT A2 vizsga. 2013-06-13 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat valamely tanult tétel állításának megfelelően! *(10 pont)*

a) Ha az alábbi állítások bármelyike fönnáll az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra, akkor a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. (1) m ... n (2) rang($\mathbf{A}$) ... (3) $\mathbf{A}$ lineárisan független oszlopvektorainak száma ...

b) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ...-dimenziós térben ... darab ....ból/ből áll. Oszlopmodellje a(z) ...-dimenziós térben ... darab ....ból/ből áll.

c) A bázis-tétel szerint $\mathbf{R}^n$ bármely alterének ...

d) A 3×5-ös $\mathbf{A}$ mátrix első sorát vonjuk ki a második sorból. E művelet elvégezhető egy mátrixszorzással:

e) Az $f(x, y, z, w) = x^2 + 3y + zw$ függvény gradiense a $P(1, 0, -1, 0)$ pontban ... , az $\mathbf{a} = (2, 4, 2, 1)$ irányú P pontbeli iránymenti deriváltjának értéke ...

f) Ha az A lineáris leképezés mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{B}$, a $\mathcal{C}$ bázisban $\mathbf{C}$, továbbá a $\mathcal{C}$ bázisról a $\mathcal{B}$ bázisra való áttérés mátrixa $\mathbf{X}$, akkor az A leképezés $\mathcal{C}$ bázisbeli $\mathbf{C}$ mátrixa kifejezhető $\mathbf{B}$ és $\mathbf{X}$ segítségével, nevezetesen $\mathbf{C} = \dots$

2. Állapítsuk meg, hogy az alábbi A és B állítások között milyen logikai kapcsolat van. Írjuk válaszul azt, hogy $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$ illetve hogy $A\,?\,B$ aszerint, hogy A-ból következik B, B-ből következik A, A és B ekvivalensek illetve A és B egyikéből sem következik a másik. *(6 pont)*

a) A: $\lim\limits_{x\to 0} f(x, x) = 1$; B: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 1$.

b) Az f függvény differenciálható P_0-ban; A: az f függvénynek P_0-ban szélsőértéke van; B: $\mathbf{grad}\, f(P) = \mathbf{0}$.

c) Egy n-ismeretlenes egyenletrendszerre A: az egyenletrendszer n-nél több egyenletből áll; B: az egyenletrendszernek nincs megoldása.

d) Egy n-ismeretlenes n egyenletből álló egyenletrendszerre A: az együtthatómátrix determinánsa 0; B: az egyenletrendszernek nincs megoldása.

e) A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sorra igaz, hogy A: konvergens; B: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

f) A kétváltozós valós f függvény az (a, b) helyen A: folytonos; B: differenciálható.

3. Igaz, vagy hamis? I/H (jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont, az összpontszám nem lehet negatív) *(4 pont)*

$\mathbf{R}^{2013}$-ban bármely 2013-nál kevesebb vektorból álló rendszer lineárisan független. ☐

Egy lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, ha kevesebb egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes. ☐

Bármely $2p$ szerint periodikus, páratlan és mindenütt differenciálható függvény Fourier-sorba fejthető, és Fourier-sora $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin \dfrac{n\pi}{p} x$ alakú. ☐

Ha a nyílt I intervallum minden pontjában $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, akkor az I intervallumon az $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ összefüggés is fönnáll. ☐

4. Egészítsük e definíciót: Tegyük fel, hogy f értelmezve van egy nyílt tartományon, és (a, b) pontja e tartománynak. Az f függvény *differenciálható* az (a, b) pontban, ha létezik... és $f(a + h, b + k) - f(a, b) = \dots$

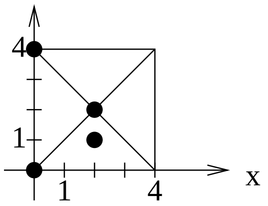
ahol lim ... és lim ...

5. Diagonalizálható-e a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix? És diagonalizálható-e ortogonálisan is? *(5 pont)*

6. Írjuk fel *(13 pont)*

a) a $\sin x$ függvény Maclaurin-sorának első 4 (nemnulla) tagját tartalmazó részletösszegét!

b) és számítsuk ki az $f(x,y) = xy$ függvénynek az ábrán látható tartomány megadott beosztásához és reprezentánsrendszeréhez tartozó integrálközelítő összegét!



c) az $f(x,y) = x^2y^3$ függvénynek a $(1,1)$ ponthoz tartozó teljes differenciálját!

d) az $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2; (x,y) \mapsto (x^2y, x-y)$ függvény deriváltleképezésének mátrixát az $(1,1)$ pontban, és ezt fölhasználva becsüljük meg a $f(1.1, 0.9)$ értékét!

e) a síkot az origón átmenő, és az x-tengellyel $60°$-os szöget bezáró egyenesre tükröző lineáris leképezés mátrixát!

f) az $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$ integrált polárkoordinátákra áttérve (kiszámolni nem kell)!

g) a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k^3}}{k}$ sor konvergenciájának típusát.

7. Mutassuk meg, hogy egy invertálható mátrixnak csak egy inverze van! *(3 pont)*

8. Mutassuk meg, hogy egy invertálható $\mathbf{A}$ mátrixnak a 0 nem lehet sajátértéke! *(3 pont)*

9. Igazoljuk a mértani sor konvergenciájára vonatkozó tételt! *(4 pont)*