3. MAT A2 vizsga. 2015-06-11 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______

1. Töltse ki az üresen lévő helyeket, hogy igaz állítást kapjon. *(10 pont)*

a) Az $\left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{smallmatrix}\right]\mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right]$ egyenlet megoldásainak száma _____

b) Az $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha $\mathbf{A}$ oszlopai közül a lineárisan függetlenek száma _____

c) Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix esetén

$\dim($ ___ $) + \dim($ ___ $) =$ ___

d) Fejtse ki az alábbi determinánst a harmadik oszlopa szerint (nem kell kiszámolni!)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ e & f & 0 & g\\ 0 & h & 0 & i\\ j & 0 & k & 0 \end{vmatrix} = \text{—}$$

e) A z-tengely körüli (térbeli) 90°-os forgatás mátrixának determinánsa egyenlő _____

f) Ha $f : [N,\infty) \to \mathbf{R}$ monoton _____ , pozitív értékű függvény, $N \in \mathbb{N}$ és $n \geqslant N$ esetén $a_n = f(n)$, akkor $\sum a_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha ___

g) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $A \in \mathbf{R}$ és $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ esetén $\lim\limits_{(a_1,a_2)} f = A$, ha minden _____

2. Igaz, vagy hamis? I/H (jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont, az összpontszám nem lehet negatív) *(7 pont)*

Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény parciálisan deriválható mindkét változója szerint (a_1, a_2)-ben, akkor folytonos is ott. ☐

Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az (a_1, a_2)-ben, akkor differenciálható is ott. ☐

Az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak halmaza megegyezik az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektorhalmazzal. ☐

Ha $\mathbf{s}$ sajátvektora az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ lineáris leképezésnek is, akkor $\mathbf{s}$ sajátvektora $\mathbf{A} + \mathbf{B}$-nek is. ☐

$\det((\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I})) = \det(\mathbf{A}^2 - \mathbf{I})$, ahol $\mathbf{I}$ az $n \times n$-es egységmátrix, $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrix. ☐

Ha $\sum a_n$ is és $\sum b_n$ is konvergens, akkor $\sum a_n b_n$ is konvergens. ☐

Ha $\sum c_n(x - 3)^n$ konvergens az $x = -2$-ben, akkor az $x = 7$-ben is. ☐

3. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre

a) Írja fel az $\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}\sin(xy)\\ e^{xy}\end{bmatrix}$ leképezés $(1, 0)$-beli Jacobi-mátrixát! *(3 pont)*

b) Mi az $f(x) = e^{x^3}$ függvény $a = 0$ körüli Taylor-sora? *(2 pont)*

c) Konvergens-e az alábbi sor? Indokoljon! *(3 pont)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$$

d) Abszolút konvergens-e az alábbi sor? Indokoljon! *(2 pont)*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$$

e) Adjon meg egy olyan $\mathbf{P}$ permutációmátrixot, mellyel balról szorozva az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 2 & 2\\ 3 & 3\\ 4 & 4\end{bmatrix}$ mátrixot a $\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 2 & 2\\ 1 & 1\\ 4 & 4\\ 3 & 3\end{bmatrix}$ mátrixot kapjuk! *(2 pont)*

4. Bizonyítsa be, hogy ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$-hez, akkor $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ hasonló $\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}$-hez! *(3 pont)*

5. Igazolja, hogy az $f(x,y)=y^2-x^2$ függvénynek nincsen lokális szélsőértéke! *(3 pont)*

6. Mi a standard bázisbeli $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ vektor koordinátás alakja az $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban? *(3 pont)*

7. Számítsa ki polár koordinátákra áttérve! *(4 pont)*

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2+y^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

8. Legyen T az a korlátos síkbeli tartomány, melyet az $y=0$, $x=2$ és $2y=x$ egyenesek határolnak! Írja fel az $f(x,y)$ függvény kettősintegrálját a T tartományon *két* egyváltozós integrál segítségével a változók mindkét sorrendje mellett ($\iint f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, $\iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$)! (Készítsen ábrát is!) *(3 pont)*

9. Legyen V az a térbeli korlátos tartomány, melyet az $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, $x^2+y^2+z^2\leq 1$ egyenlőtlenségek határoznak meg! Számítsa ki az $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ integrál értékét! *(5 pont)*