**3. MAT A2 vizsga. 2007-06-14** Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ________________ Előadó: ____

**1.** Egészítsük ki az alábbi állításokat, hogy igazak legyenek! *(11 pont)*

*a)* Tekintsük az $x = y = z$ egyenletrendszerű egyenest, és a rá való merőleges vetítés geometriai transzformációját. E lineáris leképezés képterének dimenziója ... , magterének dimenziója ... . E leképezés sajátértékei: ...
A leképezés mátrixának rangja: ...

*b)* A $z$-tengelyű, origó csúcsú, $\pi/6$ félnyílásszögű forgáskúp egyenlete a $(r, \phi, z)$ hengerkoordináta-rendszerben
$z = \dots$
míg a $(\rho, \theta, \phi)$ gömbi koordináta-rendszerben
$\dots = \dots$

*c)* A $P_0$ pontban differenciálható $f(x, y, z)$ függvény $P_0$ pontbeli, $\mathbf{u}$ irányú iránymenti deriváltjának értéke pontosan akkor 0, ha ...

*d)* *Főtengelytétel.* Minden $k \times k$ típusú ... mátrix sajátértékei ...
és sajátvektoraira igaz, hogy...

*e)* A kétváltozós $f$ függvény másodrendű parciális deriváltjaira igaz, hogy $f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$, feltéve hogy ...

*f)* Ha az $n$-ismeretlenes $m$ egyenletből álló $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor $n$, $\operatorname{rang}(\mathbf{A})$ és a kibővített mátrix rangja ($\operatorname{rang}(\mathbf{A}')$) között a következő összefüggések állnak fenn:

$\operatorname{rang}(\mathbf{A}') \dots n, \quad \operatorname{rang}(\mathbf{A}') \dots m, \quad \operatorname{rang}(\mathbf{A}) \dots \operatorname{rang}(\mathbf{A}')$

*g)* Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R$, akkor az $x \in \dots$ értékekre igaz az

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^k \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n (x-c)^k)'$$

összefüggés.

**2.** Az alábbi állítások közül melyik igaz (I) és melyik nem (N)? A helyes válasz 1/2 pontot, a helytelen -1/2 pontot ér, meg nem válaszolt kérdésre 0 pont jár. *(4 pont)*

*a)* A legfeljebb harmadfokú polinomok vektorterében
a másodfokúak 2-dimenziós alteret alkotnak. ☐
a legfeljebb másodfokú polinomok 3-dimenziós alteret alkotnak ☐
az $1$, $x$, $x^2$, $x^3$ függvények bázist alkotnak ☐
az $x+1$, $x^2+1$ függvények lineárisan függetlenek ☐

*b)* Ha minden pozitív egész $n$-re $a_n < b_n$, és a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens. ☐
Ha $a_n \to 0$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens. ☐
Ha $a_n \to a$ és $f$ folytonos az $a$ helyen, akkor $f(a_n) \to f(a)$. ☐
Ha egy sorozat monoton növekvő és korlátos, akkor már konvergens is. ☐

**3.** Mutassuk meg, hogy egy inhomogén lineáris egyenletrendszer két megoldásának különbsége megoldása a hozzá tartozó homogén lineáris egyenletrendszernek. *(3 pont)*

**4.** Mutassuk meg, hogy ha $p > 1$, akkor a $p$-sor konvergens. *(3 pont)*

**5.** Adjuk meg az $f(x, y) = x^3 - y^3$ függvény $(1, 1)$ pont körüli lineáris és másodfokú polinommal való közelítését (azaz első és másodfokú Taylor-polinomját), valamint az e ponthoz tartozó teljes differenciálját! *(4 pont)*

**6.** Az $f'_{x_i}$ és az $f''_{x_i x_j}$ parciális deriváltak kiszámolásával mutassuk meg, hogy a

$$f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3$$

függvénynek a $(0, 0, 0)$ pont szélsőértékhelye. Határozzuk meg azt is, hogy minimum vagy maximum! *(2 pont)*

**7.** Cseréljük meg az integrálás sorrendjét az alábbi integrálban! *(3 pont)*

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) \, dy \, dx$$