4. MAT A2 vizsga. 2011-06-14 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, hogy igazak legyenek! *(18 pont)*

a) Ha az $f(x,y)$ első és második parciális deriváltjai folytonosak egy (a,b) közepű körlapon, $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, és

...

akkor f-nek (a,b)-ben lokális maximuma van.

b) Az $n \times n$-es valós mátrix determinánsán definíció szerint olyan függvényt értünk, mely:

c) a legjobb közelítés tétele szerint ha $\mathbf{x}$ az $\mathbf{R}^n$ tér egy vektora és ... akkor $\mathbf{x}$-nek egyetlen legjobb közelítése van ...-ben, és az egyenlő ...

d) Számítsuk ki az alábbi determináns értékét sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel (melyik sor vagy oszlop szerint érdemes kifejteni?)

$$\begin{vmatrix} a & c & 0 & d \\ a & b & c & d \\ a & c & 0 & d \\ a & c & d & a \end{vmatrix} =$$

e) A dimenziótétel szerint bármely $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix esetén:

f) Számítsuk ki az $f(x,y,z,w) = x^5 + yw - 2z$ függvény $\mathbf{a} = (1,2,2,4)$ irányú $(1,2,2,1)$ pontbeli iránymenti deriváltját!...

g) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy $n \times n$-es valós mátrix diagonalizálható legyen az, hogy ...

h) A homogén lineáris $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha $\det(\mathbf{A}) \dots 0$, ami azzal ekvivalens, hogy $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) \dots n$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ oszlopvektorai közt a lineárisan függetlenek száma ...

i) Írjuk fel az $\mathbf{R}^3$ térbeli $(1,2,2)$ irányvektorú egyenesre való merőleges vetítés mátrixát a standard bázisban!

2. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét (az integrálás sorrendjének megcserélésével)! *(5 pont)*

$$\int_0^{2\sqrt{\pi}} \int_{y/2}^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

3. Számítsuk ki az alábbi integrált polár koordinátákra való áttéréssel: *(5 pont)*

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$$

4. Írjuk fel az $f(x,y,z) = (x+y+z, x+2y+3z, x+y+2z)$ lineáris transzformációt az $\{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,0)\}$ bázisban! *(4 pont)*

5. Oldjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix PLU-felbontását fölhasználva az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert minél egyszerűbben, ahol *(5 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

6. Mutassuk meg, hogy egy mátrix egyik sajátértékéhez tartozó sajátvektorai a nullvektorral együtt alteret alkotnak. *(4 pont)*

7. Mutassuk meg, hogy a kétváltozós f függvény (x_0, y_0) pontbeli differenciálhatóságából következik folytonossága! *(4 pont)*

8. Keressük meg az alábbi ellentmondásos egyenletrendszer optimális megoldását: *(5 pont)*

$$\begin{aligned} x + 3y &= -2 \\ 2x + y &= 6 \\ -2x + y &= 8 \end{aligned}$$

9. Keressük meg az $f(x, y) = y^3 + 3xy - x^2$ függvény lokális szélsőértékeit! *(5 pont)*

10. A b paraméter mely értékére lesz az $\mathbf{R}^3$-beli $\mathbf{v} = (3, 2, b)$ vektor eleme az $(1, 2, -1)$, $(2, 4, -2)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, -3)$ vektorok által kifeszített $\mathcal{U}$ altérnek? Adjuk is meg az $\mathcal{U}$-t kifeszítő vektoroknak egy olyan lineáris kombinációját, amely $\mathbf{v}$-vel egyenlő! *(5 pont)*