3. MAT A2 vizsga. 2009-06-10 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________ Előadó:______

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, hogy igazak legyenek! *(18 pont)*

a) Ha $\mathbf{A}$ egy $3 \times n$-es mátrix, akkor az $\mathbf{A}$ második és harmadik sorának felcserélésével kapott $\mathbf{B}$ mátrix megkapható egyetlen mátrixművelettel, nevezetesen...

b) Írjuk fel $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ LU-felbontását!

c) Az a és b paraméterek milyen értékei mellett lesz az alábbi bővített mátrixszal megadott egyenletrendszernek végtelen sok megoldása?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a & a & b \\ 0 & 0 & a-1 & b \end{bmatrix}$$

Végtelen sok megoldás van, ha ...

d) Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy ... mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan ... $\mathbf{D}$ és egy ... $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

e) Tekintsük az $y = x$ egyenletű egyenesre való merőleges vetítés síkbeli geometriai transzformációját! E transzformáció sajátértékei: ...
a hozzájuk tartozó sajátvektorok: ...
a transzformáció mátrixa:...

f) A $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hatványsor tagonként deriválható a ... intervallumon, így ezen az intervallumon a $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ hatványsor összege = ...

g) *(Fubini-tétel)* Ha az $f(x, y)$ függvény ... az $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$ tartományon, akkor az f függvény kettősintegrálja e téglalap felett ...

h) Annak, hogy az $f(x, y)$ függvénynek szélsőértéke legyen a $P(a, b)$ pontban elégséges feltétele, hogy...

i) Az $f(x, y)$ függvény differenciálható a $P(a, b)$ pontban, ha...

2. Az alábbiak közül melyik állítás igaz? (I/H, pontozás jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont) *(6 pont)*

Ha f differenciálható a P pontban, akkor van olyan irány, amelyben 0 az iránymenti derivált. ☐

Ha f differenciálható a P pontban, akkor e pontban minden iránymenti deriváltja létezik és megegyezik a deriváltjával. ☐

Ha f-nek minden iránymenti deriváltja létezik a P pontban, akkor e pontban léteznek az elsőrendű parciális deriváltjai is. ☐

Nincs olyan $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ lineáris leképezés, melynek minden vektor a sajátvektora. ☐

Minden lineáris leképezés mátrixának rangja megegyezik az értékkészletének dimenziójával ☐

Minden lineáris leképezés mátrixának rangja megegyezik nullterének dimenziójával ☐

3. Az alábbi mátrixok közül melyek lehetnek ugyanannak az $\mathbf{A}$ mátrixnak a lépcsős alakjai, melyek nem, és miért (tömör indoklást kérünk)? *(4 pont)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértékéhez tartozó sajátvektorai a nullvektor hozzávételével alteret alkotnak! *(3 pont)*

5. Bizonyítsuk be, hogy $0 < p < 1$ esetén az alábbi sor divergens! *(4 pont)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

6. Mennyi a térfogata annak a testnek, amelyet alulról az xy sík, oldalról az $x^2+y^2=4$ henger, felülről a $z=x^2+y^2$ felület határol? *(4 pont)*

7. Cseréljük meg az integrálás sorrendjét az alábbi integrálban, majd végezzük el az integrálást! *(5 pont)*

$$\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

8. Írjuk fel a lineáris $\mathbf{r} \mapsto (-1,0,5)\times\mathbf{r}$ leképezés mátrixát! *(4 pont)*

9. Tekintsük azt a 2π szerint periódikus f függvényt, melyre $f(x)=|x|$, ha $x\in[-\pi,\pi]$. Már kiszámoltuk a következő Fourier-együtthatókat:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2}, \quad (n=1,2,\dots).$$

a) Határozzuk meg az a_0, b_1, b_2,... együtthatók értékét!

b) Írjuk fel az f függvényhez tartozó Fourier-sort!

c) E sor összege megegyezik-e minden x helyen az f függvénnyel?

d) E Fourier-sort felhasználva határozzuk meg a

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

sor összegét! *(7 pont)*

10. Határozzuk meg az alábbi sor konvergenciatartományát! *(5 pont)*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$$