3. MAT A2 vizsga. 2015-06-11 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______

1. Töltse ki az üresen lévő helyeket, hogy igaz állítást kapjon. *(10 pont)*

a) Az $\left[\begin{smallmatrix}1&2\\0&3\end{smallmatrix}\right]\mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ egyenlet megoldásainak száma _____

b) Az $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha $\mathbf{A}$ oszlopai közül a lineárisan függetlenek száma _____

c) Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix esetén

$\dim(\ \_\_\_\ ) + \dim(\ \_\_\_\ ) = \_\_\_$

d) Fejtse ki az alábbi determinánst a harmadik oszlopa szerint (nem kell kiszámolni!)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & 0 & g \\ 0 & h & 0 & i \\ j & 0 & k & 0 \end{vmatrix} = \_$$

e) A z-tengely körüli (térbeli) 90°-os forgatás mátrixának determinánsa egyenlő _____

f) Ha $f : [N, \infty) \to \mathbf{R}$ monoton _____ , pozitív értékű függvény, $N \in \mathbb{N}$ és $n \geqslant N$ esetén $a_n = f(n)$, akkor $\sum a_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha ___

g) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $A \in \mathbf{R}$ és $(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ esetén $\lim\limits_{(a_1,a_2)} f = A$, ha minden _____

MO:

a) 1

b) kisebb mint n

c) $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, n (vagy $\mathcal{O}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, n, vagy $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(A)$, n)

d) $= c\begin{vmatrix} e & f & g \\ 0 & h & i \\ j & 0 & 0 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & g \\ 0 & h & i \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

f) csökkenő/$\int\limits_N^\infty f(x)\,dx$ konvergens.

g) $\varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy minden (x, y) pontra, melyre $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, igaz, hogy $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

2. Igaz, vagy hamis? I/H (jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont, az összpontszám nem lehet negatív) *(7 pont)*

Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény parciálisan deriválható mindkét változója szerint (a_1, a_2)-ben, akkor folytonos is ott. ☐

Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az (a_1, a_2)-ben, akkor differenciálható is ott. ☐

Az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak halmaza megegyezik az $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektorhalmazzal. ☐

Ha $\mathbf{s}$ sajátvektora az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ lineáris leképezésnek is, akkor $\mathbf{s}$ sajátvektora $\mathbf{A} + \mathbf{B}$-nek is. ☐

$\det((\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I})) = \det(\mathbf{A}^2 - \mathbf{I})$, ahol $\mathbf{I}$ az $n \times n$-es egységmátrix, $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrix. ☐

Ha $\sum a_n$ is és $\sum b_n$ is konvergens, akkor $\sum a_n b_n$ is konvergens. ☐

Ha $\sum c_n(x - 3)^n$ konvergens az $x = -2$-ben, akkor az $x = 7$-ben is. ☐

MO: H H I I I H I

3. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre

a) Írja fel az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \sin(xy) \\ e^{xy} \end{bmatrix}$ leképezés $(1,0)$-beli Jacobi-mátrixát! *(3 pont)*

b) Mi az $f(x) = e^{x^3}$ függvény $a = 0$ körüli Taylor-sora? *(2 pont)*

c) Konvergens-e az alábbi sor? Indokoljon! *(3 pont)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$$

d) Abszolút konvergens-e az alábbi sor? Indokoljon! *(2 pont)*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$$

e) Adjon meg egy olyan $\mathbf{P}$ permutációmátrixot, mellyel balról szorozva az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot a $\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixot kapjuk! *(2 pont)*

MO: a) $\begin{bmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $1 + x^3 + \frac{1}{2!}x^6 + \ldots + \frac{1}{k!}x^{3k} + \ldots +$

c) Igen, mert alternál, a tagjai nullához tartanak ($\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$) és m. csökken, mert tg sz. m. nő a $[0,1]$-en.

d) Nem, mert $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$ amiből képezett sor divergens.

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

4. Bizonyítsa be, hogy ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$-hez, akkor $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hasonló $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$-hez! *(3 pont)*

MO: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \iff \exists \mathbf{C} : \mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC}$. Ekkor $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{IC} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C}$.

5. Igazolja, hogy az $f(x,y) = y^2 - x^2$ függvénynek nincsen lokális szélsőértéke! *(3 pont)*

MO: $\nabla f(x,y) = (-2x, 2y)$, $(-2x, 2y) = (0,0) \rightsquigarrow (x,y) = (0,0)$, $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} < 0$, azaz az origóban nyeregpont van.

6. Mi a standard bázisbeli $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ vektor koordinátás alakja az

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ bázisban? *(3 pont)*

MO:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b+c+d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c+d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix}$$

7. Számítsa ki polár koordinátákra áttérve! *(4 pont)*

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 + y^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

MO: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}$

8. Legyen T az a korlátos síkbeli tartomány, melyet az $y = 0$, $x = 2$ és $2y = x$ egyenesek határolnak! Írja fel az $f(x,y)$ függvény kettősintegrálját a T tartományon *két* egyváltozós integrál segítségével a változók mindkét sorrendje mellett ($\iint f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$, $\iint f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$)! (Készítsen ábrát is!) *(3 pont)*

MO: $\int\limits_0^1 \int\limits_{2y}^2 xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{x/2} xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

9. Legyen V az a térbeli korlátos tartomány, melyet az $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ egyenlőtlenségek határoznak meg! Számítsa ki az $\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)^4 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ integrál értékét! *(5 pont)*

MO:

$$V = \{(\rho, \varphi, \vartheta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\begin{aligned} \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^4 \, dxdydz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^8 \, \rho^2 \, \sin\vartheta \, d\rho d\varphi d\vartheta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^{10} \, \sin\vartheta \, d\rho d\varphi d\vartheta = \\ &= \left[\frac{\rho^{11}}{11}\right]_0^1 [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \, [-\cos\vartheta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{11} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (0 - (-1)) = \frac{\pi}{22} \end{aligned}$$