4. MAT A2 vizsga. 2015-06-18 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ____________________

1. Egészítsük ki e definíciókat! *(5 pont)*

a) Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{s}$ vektor az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektora, ha

$As = \lambda s$ és $s \neq 0$

b) Tegyük fel, hogy f értelmezve van egy nyílt tartományon, és (a, b) pontja e tartománynak. Azt mondjuk, hogy az f függvény az x változója szerint *parciálisan differenciálható* az (a, b) pontban, ha $\exists$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \text{ határérték}$$

c) Tegyük fel, hogy f értelmezve van egy nyílt tartományon, és (a, b) pontja e tartománynak, továbbá tegyük fel, hogy léteznek az $f_x(a, b)$ és $f_y(a, b)$ parciális deriváltak. Azt mondjuk, hogy az f függvény *differenciálható* az (a, b) pontban, ha $\exists$ ε_1, ε_2 fv., hogy e tartományon

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+\varepsilon_1 h+\varepsilon_2 k,$$

ahol $\lim\limits_{(0,0)} \varepsilon_1 = \lim\limits_{(0,0)} \varepsilon_2 = 0$.

2. Egészítsük ki az alábbi állításokat valamely tanult tétel állításának megfelelően! *(6 pont)*

a) A homogén lineáris $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha az alábbi állítások bármelyike teljesül: *(1)* $\det(\mathbf{A})$ $=$ 0. *(2)* $\operatorname{rref}(\mathbf{A})$ $\neq$ $\mathbf{I}$. *(3)* $\operatorname{rang}(\mathbf{A})$ $<$ n.

b) Ha az A lineáris leképezés mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{B}$, továbbá a $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$ bázisra való áttérés mátrixa $\mathbf{X}$, akkor az A leképezés $\mathcal{C}$ bázisbeli $\mathbf{C}$ mátrixa kifejezhető $\mathbf{B}$ és $\mathbf{X}$ segítségével, nevezetesen $\mathbf{C} = XBX^{-1}$

c) Ha a valós $\sum a_n x^n$ hatványsor valamely $c \neq 0$ helyen konvergens, akkor abszolút konvergens minden olyan x helyen, ahol $|x| < |c|$.

3. Igaz, vagy hamis? I/H (jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont, az összpontszám nem lehet negatív) *(6 pont)*

A valós $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus. $\boxed{\text{I}}$

Egy valós együtthatós *homogén* lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, ha kevesebb egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes. $\boxed{\text{I}}$

Egy valós együtthatós *inhomogén* lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, ha kevesebb egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes. $\boxed{\text{H}}$

Ha a kétváltozós f függvény differenciálható az (a, b) pontban, akkor létezik mindkét parciális deriváltja is az (a, b) pontban. $\boxed{\text{I}}$

Egy lineáris transzformáció különböző bázisokban felírt mátrixai nem feltétlenül hasonlóak. $\boxed{\text{H}}$

Ha az 3×3-as $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa 5, akkor $2\mathbf{A}$ determinánsa 10. $\boxed{\text{H}}$

Ha a nyílt I intervallum minden pontjában $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, akkor az I intervallumon az $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ összefüggés is fönnáll. $\boxed{\text{I}}$

4. Az alábbi állítások kipontozott részeibe illő egyjegyű egész számot írjuk a sor végén lévő négyzetbe! *(10 pont)*

a) Egy 5×4-es $\mathbf{A}$ mátrixra ekvivalensek:

(a) $\operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \ldots$ $\boxed{4}$

(b) Az inhomogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásainak száma... $\boxed{1}$

b) Bármely $\mathbf{C}_{3\times 4}$ mátrixra $\operatorname{rang}\mathbf{C} + \dim\mathcal{N}(\mathbf{C}) = \ldots$ $\boxed{4}$

c) $f(x, y, z, u) = x^3 + yz + u$ függvény maximális iránymenti deriváltja négyzetének értéke a $P(0, 1, 0, 1)$ pontban ... $\boxed{2}$

és iránymenti deriváltja P-ben az $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$ vektor irányában... $\boxed{1}$

$\nabla f = (3x^2, z, y, 1)$ $\quad \nabla f(P) = (0,0,1,1)$

$|\nabla f(P)|^2 = 2, \quad \nabla f(P)\cdot \frac{1}{2}(1,1,1,1) = 1$

d) Az $x^2 - 2x$ függvény 1 körüli Taylor-sorában a nem nulla tagok száma ..., $\boxed{2}$

az $(x - 1)$ együtthatója... $\boxed{0}$

$x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1$

e) Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sajátvektorához tartozó sajátérték $\lambda = \ldots$ $\boxed{2}$

e λ sajátalterének dimenziója... $\boxed{2}$

$\mathbf{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz(I/H) $\boxed{\text{I}}$

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&-1&-2\end{bmatrix} \to \begin{matrix} x-y-2z=0 \\ t \quad s \end{matrix} \to \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t+2s\\t\\s\end{bmatrix}=$$

$$= t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az alábbi két pont henger és gömbi koordinátáit (ϑ az xy-síkban az x-tengellyel bezárt szöget jelöli mindkét koordinátarendszer esetén)! *(2 pont)*

Derékszögű koordináták:	$(0, -1, -1)$	$(-1, -1, 0)$
henger (r, ϑ, z):	$\left(1, \frac{3\pi}{2}, -1\right)$	$\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}, 0\right)$
gömbi $(\rho, \varphi, \vartheta)$:	$\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$