6. Állapítsuk meg, hogy az alábbi A és B állítások között milyen logikai kapcsolat van. Írjuk válaszul azt, hogy $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Leftrightarrow B$ illetve hogy $A\,?\,B$ aszerint, hogy A-ból következik B, B-ből következik A, A és B ekvivalensek illetve A és B egyikéből sem következik a másik. *(6 pont)*

a) A: $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1$, $\lim_{y\to 0} f(0,y) = -1$,
B: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nem létezik.

$A \Rightarrow B$

b) Az f függvény differenciálható P_0-ban; A: $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$; B: az f függvénynek (a,b)-ben minimuma van.

$B \Rightarrow A$

c) Legyen $\mathbf{A}$ egy négyzetes mátrix. A: $\mathbf{A}$-nak a 0 sajátértéke; B: $\det \mathbf{A} = 0$.

$A \Leftrightarrow B$

d) A: A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens; B: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$A \Rightarrow B$

e) Az f 2π szerint periodikus függvény Fourier-sora legyen konvergens és állítsa elő f-et: A: f páratlan függvény; B: f Fourier sorában csak sinuszos tagok vannak.

$A \Leftrightarrow B$

f) Legyen az $f\colon R^2 \to R$ függvény értelmezve egy $\mathbf{a} \in R^2$ pont egy környezetén. A: f folytonos $\mathbf{a}$-ban; B: f differenciálható $\mathbf{a}$-ban.

$B \Rightarrow A$

7. Igazoljuk, hogy egy mátrix sortere és nulltere merőleges egymásra! *(3 pont)*

$x \in \mathcal{N}(A) \rightsquigarrow Ax = 0 \rightsquigarrow$ A $\forall$ sora merőleges $\mathcal{N}(A)$ $\forall$ vektorára

$s \in \mathcal{S}(A) \quad s = c_1 a_1 + \ldots + c_k a_k$

$\rightsquigarrow s \cdot x = c_1 a_1 \cdot x + \ldots + c_k a_k \cdot x = 0 + \ldots + 0 = 0$

$\rightsquigarrow s \perp x.$

8. Bizonyítsuk be, hogy az $n \times n$-es valós $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha $\mathbf{R}^n$-nek létezik az $\mathbf{A}$ sajátvektoraiból álló bázisa. *(3 pont)*

$Ac_i = \lambda_i c_i$

$C = [c_1 | \ldots | c_n]$

$\{c_1 \ldots c_n\}$ bázis $\Rightarrow$ C invertálható

$Ac_i = \lambda_i c_i \rightsquigarrow A[c_1 \ldots c_n] = [c_1 \ldots c_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow AC = C\Lambda \rightsquigarrow \Lambda = C^{-1}AC$

9. Végezzük el az alábbi számításokat! *(9 pont)*

a) Számítsuk ki polárkoordinátarnedszerben annak a testnek a térfogatát, amelyet alulról az xy-sík, oldalról az $x^2 + y^2 = 4$ hengerfelület, felülről pedig a $z = x^2 + y^2 + 1$ paraboloid határolja. Készítsünk ábrát! *(3 pont)*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2+1)\, r\, dr\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_0^2 d\vartheta = \int_0^{2\pi} 6\, d\vartheta = 12\pi$$

b) Van-e szélsőértéke az $xe^x + y^2 - y$ függvénynek a $(-1, 1/2)$ helyen, és ha igen, milyen típusú? Válaszát indokolja! *(3 pont)*

$f_x = e^x + xe^x \qquad f_{xx} = 2e^x + xe^x \qquad f_{xy} = 0$

$f_y = 2y - 1 \qquad f_{yy} = 2$

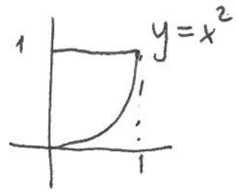
$f_x(-1, \tfrac{1}{2}) = e^{-1} - e^{-1} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2e^{-1} - e^{-1} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$

$f_y(-1, \tfrac{1}{2}) = 0$

MIN

c) Integrálok cseréjével számítsa ki az alábbi integrált. Ábrázolja az integrációs tartományt! *(3 pont)*

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 \frac{x \sin y}{y}\, dy\, dx =$$



$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x \frac{\sin y}{y}\, dx\, dy =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \frac{\sin y}{y}\right]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{1}{2} \sin y\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos y\right]_0^1 = \frac{1 - \cos 1}{2}$$