

1. Végezzük el az alábbi számításokat!

(8 pont)

a) Határozzuk meg az alábbi mátrix alapvető altereinek dimenzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) = \dots \quad \dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) = \dots$$

$$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dots \quad \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)) = \dots$$

b) Tegyük fel, hogy a 3×3 -as \mathbf{A} mátrixra $\det(\mathbf{A}) = 4$. Ekkor $\det(\mathbf{A}^{-2}) = \dots$ $\det(2\mathbf{A}) = \dots$

c) Ismerjük egy paraméteres egyenletrendszer bővített mátrixának egy lépcsős alakját. A paraméterek milyen értékei esetén lesz az egyenletrendszernek 0, 1 vagy végtelen sok megoldása.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 2 & b & 1 \\ 0 & b & 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & 1 \end{array} \right]$$

d) Írjuk fel az \mathbf{A} mátrix inverzének harmadik sorában és második oszlopában lévő elemét:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}^{-1}]_{32} =$$

e) Legyen \mathbf{A} a \mathcal{B} bázisról a \mathcal{C} bázisra való áttérés mátrixa! Legyen az L lineáris leképezés mátrixa a \mathcal{B} bázisban \mathbf{B} , a \mathcal{C} bázisban \mathbf{C} . Írjuk föl azt a formulát, mely kifejezi e három mátrix közötti kapcsolatot!

2. Az alábbiak közül melyik állítás igaz? (I/H, jó válasz = +1, rossz válasz = -1 pont, az összpontszám nem lehet negatív) (10 pont)

A sormodell szerint minden k egyenletből álló 3-ismeretlenes egyenletrendszer megoldáshalmaza szemléltethető úgy, mint a tér k darab síkjának közös része.

Minden valós mátrixnak lépcsős alakja egyértelmű.

Ha egy mátrix elemi sorműveletekkel egy másikba vihető, akkor redukált lépcsős alakjuk megegyezik.

Elemi sorműveletek közben az oszloptér nem változik.

Ha egy 8-ismeretlenes egyenletrendszer 16 egyenletből áll, nem lehet végtelen sok megoldása.

Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak.

Rögzített \mathbf{A} mátrix mellett azok a \mathbf{b} vektorok, melyekre az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer megoldható, alteret alkotnak.

Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha \mathbf{b} előáll \mathbf{A} oszlopainak lineáris kombinációjaként.

$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$.

Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

3. Határozzuk meg az első ismeretlen értékét az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ 1 & 2 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$ mátrixú egyenletrendszerben a Cramer-szabállyal! (3 pont)

4. Az A lineáris leképezés standard bázisra vonatkozó mátrixa:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel e leképezés $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ bázisra vonatkozó $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ mátrixát! (6 pont)

5. Válasszunk ki a $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 0, 6, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -2, -1)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 2, -1, 1)$ vektorok által kifeszített al-
térből egy bázist, és írjuk fel az összes vektor e bázisra vonat-
kozó koordinátás alakját! (6 pont)

7. Az alábbi mátrixok közül melyik diagonalizálható, melyik
diagonalizálható ortogonálisan és melyik nem a valós test föl-
lött? Nagyon röviden indokoljuk a válaszunk! (3 pont)

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

...

...

...

8. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait. Írjuk fel a saj-
átfelbontását, és ennek fölhasználásával számítsuk ki az \mathbf{A}^6
mátrixot! (10 pont)

6. Határozzuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását! (4 pont)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$