MAT A2a – 1. ZH. – 2015. március 26. Név: ____________________ Gyakvez.: ______

1. *Feleletválasztás:* Mely válasz(ok) helyes(ek) az alábbi kérdésekre? A helyes választ/válaszokat egy X-szel jelöljük meg, a helytelent hagyjuk üresen! (Helyes kitöltés egy kérdésre 2 pont, minden hiba -1 pont, negatív pont nem kapható.)

1. Tekintsünk egy 4 vektorból álló $\mathbf{R}^5$-beli vektorrendszert, a belőlük képzett 5×4-es $\mathbf{A}$ mátrix rangja legyen 2.
   - (a) Sorterének és oszlopterének 2 a dimenziója. ☐
   - (b) $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakjának 2 zérussora van. ☐
   - (c) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek végtelen sok vagy 0 megoldása is lehet. ☐
2. Hogyan változnak elemi sorműveletek közben a sor- és oszlopterek?
   - (a) A sortér nem változik. ☐
   - (b) Az oszloptér nem változik. ☐
   - (c) A sortér sorai közti lineáris kapcsolatok nem változnak. ☐
   - (d) Az oszloptér oszlopai közti lineáris kapcsolatok nem változnak. ☐
3. Melyek helyesek az alábbi mátrixműveletekre vonatkozó tulajdonságok közül?
   - (a) Ha $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$ és $\mathbf{C} \neq \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. ☐
   - (b) Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, akkor vagy $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, vagy $\mathbf{B} = \mathbf{O}$. ☐
   - (c) Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ négyzetes valós mátrixok és $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, akkor $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ is fennáll. ☐
4. Egy $n \times n$-es determináns értéke kiszámítható az alábbi módokon:
   - (a) Kiválasztunk n elemet a determinánsból úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban egy legyen közülük, a többi számot 0-ra változtatjuk. Az így kapott determináns értékét kiszámoljuk, majd ezt megismételjük az összes lehetséges $n!$ különböző módon, és az így kapott értékeket összeadjuk. ☐
   - (b) Az elemi sorműveletek közül csak a hozzáadás (egy sor konstansszorosának másikhoz adása) műveletét alkalmazva felső háromszögalakra hozzuk, majd összeszorozzuk a főátlóban lévő elemeket! ☐
   - (c) Vesszük a második sorának $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ elemeit, a soruk és oszlopuk elhagyásával kapott $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2n}$ aldeterminánsokat, és képezzük a
   $$-a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} - \ldots + (-1)^n a_{2n}A_{2n}$$
   összeget. ☐
5. Mely állítások igazak egy négyzetes valós $\mathbf{A}$ mátrixra?
   - (a) Az, hogy $\mathbf{A}$ diagonalizálható, azt jelenti, hogy van olyan $\mathcal{B}$ bázis, melyben az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés mátrixa diagonális. ☐
   - (b) Minden mátrix diagonalizálható, melynek van n független sajátvektora. ☐
   - (c) Minden szimmetrikus mátrix diagonalizálható. ☐

2. Számítsuk ki az

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

determináns értékét! *(4 pont)*

3. Az a és b paraméter értékeitől függően hány megoldása lehet az alábbi bővített mátrixú egyenletrendszernek? *(4 pont)*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{array}\right]$$

4. Válasszunk ki a $\mathbf{v}_1 = (1,2,1,3)$, $\mathbf{v}_2 = (2,4,2,6)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,1,1)$, $\mathbf{v}_4 = (2,5,3,7)$ vektorok közül néhányat, melyek a négy vektor által kifeszített altérnek egy bázisát alkotják, és írjuk fel mind a négy vektor e bázisra vonatkozó koordinátás alakját! *(6 pont)*

5. Egy lineáris leképezés mátrixa a standard bázisban

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel mátrixát a

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorok alkotta bázisban! *(8 pont)*

6. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix LU-felbontását! Ezt fölhasználva oldjuk meg az

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert! *(10 pont)*

7. Határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátaltereinek egy-egy bázisát! *(8 pont)*