**MAT A2 – 1. ZH. – 2011. március 25.** Név: ______________________ Gyakvez.: ______

**1.** Végezzük el az alábbi számításokat! *(7 pont)*

*a)* Határozzuk meg az alábbi mátrix alapvető altereinek dimenzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) = \dots$ $\dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) = \dots$
$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dots$ $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)) = \dots$

*b)* Tegyük fel, hogy a $4 \times 4$-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\det(\mathbf{A}) = 2$. Ekkor $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dots$ $\det(3\mathbf{A}) = \dots$

*c)* Számítsuk ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \dots$$

*d)* Ha az $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es mátrix, és sorterének dimenziója $r$, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszerben a szabad változók száma $= \dots$ , a nulltér dimenziója $= \dots$

*e)* Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrix előjeles $A_{32}$ aldeterminánsát (kiszámítani nem kell, csak felírni):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & c \\ c & d & c & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \quad A_{32} =$$

**2.** Az alábbiak közül melyik állítás igaz? (I/H, pontozás jó válasz $= +1$, rossz válasz $= -1$ pont, de az összpontszám nem lehet negatív) *(8 pont)*

Ha egy $n$-ismeretlenes egyenletrendszer nem oldható meg, akkor az egyenletek olyan hipersíkok egyenletei, melyek közt van két párhuzamos, de nem azonos hipersík. ☐

Ha egy $n$-ismeretlenes egyenletrendszer csak két egyenletből áll, akkor az oszlopmodell szerint pontosan akkor oldható meg tetszőleges jobb oldal esetén, ha a vektoregyenlet bal oldalán szereplő vektorok közt van kettő lineárisan független. ☐

Minden homogén lin. egyenletrendszer megoldható. ☐

Ha egy 9-ismeretlenes egyenletrendszer csak 6 egyenletből áll, akkor végtelen sok megoldása van. ☐

Alterek uniója altér. ☐

Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak. ☐

Rögzített $\mathbf{A}$ mátrix mellett azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer megoldható, alteret alkotnak. ☐

Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely két megoldásának különbsége megoldása a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ egyenletrendszernek. ☐

**3.** Válasszunk ki a $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 2, 4)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 3, 2)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 3, 4, 4)$ és $\mathbf{v}_5 = (2, 3, -1, 2)$ vektorok közül maximális számú lineárisan függetlent és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként. *(5 pont)*

**4.** *a)* Határozzuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*b)* Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg e felbontást fölhasználva, (elemi sorműveletek, mátrixinvertálás, Cramer-szabály használata nélkül!) az

$$\begin{aligned} x \qquad + z &= 1 \\ -x + 2y - 2z &= -1 \\ 4y - z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert! *(2+3 pont)*

**5.** Milyen $a$ és $b$ értékekre lesz 0, 1, illetve végtelen sok megoldása az alábbi bővített mátrixú egyenletrendszernek? Adjuk is meg a megoldást abban az esetben, ha végtelen sok megoldás van! *(5 pont)*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & a & b & 2 \\ 0 & 0 & b+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array}\right]$$

**6.** Oldjuk meg az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet ahol *(5 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**7.** Határozzuk meg az első ismeretlen értékét az $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right]$ mátrixú egyenletrendszerben a Cramer-szabállyal, és együtthatómátrixának inverzében a második sor harmadik elemét megfelelő aldeterminánsok segítségével! *(5 pont)*

**8.** Írjuk fel a standard $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bázisról a $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,3,4)\}$ valamint a $\mathcal{B}$-ről az $\mathcal{E}$-re való áttérés mátrixát, és írjuk fel az $(1,-2,3)$ vektor $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátás alakját! *(5 pont)*

**9.** Határozzuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását, majd írjuk fel ezt fölhasználva az összes megoldást! *(5 pont)*

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ 2x + 3y + 3z &= 11 \\ x + y + 2z &= 6 \end{aligned}$$