MAT A2 – 2. ZH. – 2007. május 4. Név: ______________________ Gyakvez.: ________

1. Az $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixnak sajátvektorai $(3,1)$ és $(1,-1)$. Adjunk meg olyan T mátrixot, amellyel $T^{-1}AT = D$ diagonális. Mi ekkor D? *(5 pont)*

2. Adjuk meg az $f : (x,y) \mapsto (x, 2x-y)$ transzformáció mátrixát az $\{(1,-1),(1,0)\}$ bázisban. *(8 pont)*

3. Egy szobában a hőmérséklet Celsius fokban kifejezve jó közelítéssel $20 + \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2} - \dfrac{1}{9x}$. Az $(1,1,1)$ pontban milyen irányban csökken a hőmérséklet a leggyorsabban, és mennyi ebben az irányban a csökkenés sebessége? *(6 pont)*

4. Tegyük fel, hogy az $w = f(x,y,z)$ függvény értelmezve van és differenciálható az $(1,0,0)$ pontot belsejében tartalmazó valamely tartományon, és $\nabla f(1,0,0) = (3,1,5)$. Tekintsük az $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ egyenletekkel megadott görbét. Határozzuk meg a $\frac{\partial w}{\partial t}$ deriváltat a $t = 0$ helyen! *(5 pont)*

5. Egy f függvény első és második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak egy tartományon, melynek egy belső pontjában értékei $f_x = f_y = f_z = 0$, $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = -1$, $f_{xy} = f_{yz} = a$, $f_{xz} = 0$. Az a paraméter milyen értékei mellett lesz e függvénynek az adott helyen biztosan maximuma? *(5 pont)*

6. Mutassuk meg, hogy a $(0,0)$ pontban nincs limesze a $\dfrac{\sin^2 x}{x^2+y^2}$ függvénynek. *(5 pont)*

7. Határozzuk meg az integrálás határait, ha fölcseréljük az integrálás sorrendjét az $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ integrálban. *(8 pont)*

8. Számítsuk ki az $f(x,y,z) = 1 + y$ függvény integrálját azon a háromszög alapú hasáb tartományon, melynek alapja az xy-síkon a $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ csúcsú háromszög, alkotói párhuzamosak a z tengellyel, és amelyet alulról a $z = 0$, felülről a $z = 1$ egyenletű sík határol. (Először z szerint integráljunk, majd válasszuk meg az x és y szerinti integrálás sorrendjét!) *(8 pont)*