MAT A2 – 2. ZH. – 2011. április 21. Név: ______________________ Gyakvez.: ______

1. Határozzuk meg az $(x, y) \mapsto (x^2+y, xy^2)$ leképezés $(1, 2)$ ponthoz tartozó deriváltleképezésének mátrixát! Ezt és $f(1, 2)$ értékét fölhasználva becsüljük meg az $f(1.01, 1.98)$ értéket! *(6 pont)*

2. Egy lineáris leképezés mátrixa a standard bázisban

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel azt az ortonormált bázist, melyben mátrixa diagonális! Írjuk fel e mátrix diagonalizálását, *és ezt fölhasználva* számítsuk ki harmadik hatványát! *(8 pont)*

3. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^4 - x^2 - 2\,xy + y^2$ függvény kritikus pontjait, és döntsük el, melyik lokális szélsőértékhely, melyik nyeregpont. *(8 pont)*

4. Egy szobában a hőmérséklet Celsius fokban kifejezve jó közelítéssel $16 + z + \dfrac{x}{y+1}$. A $(0, 1, 2)$ pontban milyen irányban növekszik a hőmérséklet a leggyorsabban, és mennyi ebben az irányban a növekedés sebessége? *(5 pont)*

5. Írjuk fel a $f(x,y) = x^2y - xy$ függvény grafikonját az $(1,2,0)$ pontban érintő sík egyenletét! *(4 pont)*

6. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban. *(4 pont)*

7. Írjuk fel az $x - y - 2z = 0$ egyenletű síkra való merőleges vetítés mátrixát! *(5 pont)*

8. Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit, sajátaltereit, valamint sajátértékeinek algebrai és geometriai multiplicitását! *(5 pont)*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

9. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x + 3y &= -2 \\ x - y &= 4 \end{aligned}$$

Amennyiben nem oldható meg, adjuk meg egy optimális megoldását! *(5 pont)*