MAT A2b – 1. ZH. – 2013. március 29. Név: ______________________ Gyakvez.: ______

1. Végezzük el az alábbi számításokat! *(8 pont)*

a) Határozzuk meg az alábbi mátrix alapvető altereinek dimenzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) = 2$ $\quad\dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) = 2$

$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = 3$ $\quad\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)) = 2$

b) Tegyük fel, hogy a 3×3-as $\mathbf{A}$ mátrixra $\det(\mathbf{A}) = 4$. Ekkor $\det(\mathbf{A}^{-2}) = \frac{1}{16}$ $\quad\det(2\mathbf{A}) = 32$

c) Ismerjük egy paraméteres egyenletrendszer bővített mátrixának egy lépcsős alakját. A paraméterek milyen értékei esetén lesz az egyenletrendszernek 0, 1 vagy végtelen sok megoldása.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 2 & b & 1 \\ 0 & b & 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & 1 \end{array}\right]$$

$\left.\begin{array}{l} b=1 \text{ vagy} \\ b=0 \text{ és } a \neq -1 \end{array}\right\}$ 0 mo.

egyébként ∞ mo.

d) Írjuk fel az $\mathbf{A}$ mátrix inverzének harmadik sorában és második oszlopában lévő elemét:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}^{-1}]_{32} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{5}$$

e) Legyen $\mathbf{A}$ a $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$ bázisra való áttérés mátrixa! Legyen az L lineáris leképezés mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{B}$, a $\mathcal{C}$ bázisban $\mathbf{C}$. Írjuk föl azt a formulát, mely kifejezi e három mátrix közötti kapcsolatot!

$C = ABA^{-1}$ vagy $B = A^{-1}CA$

2. Az alábbiak közül melyik állítás igaz? (I/H, jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont, az összpontszám nem lehet negatív) *(10 pont)*

A sormodell szerint minden k egyenletből álló 3-ismeretlenes egyenletrendszer megoldáshalmaza szemléltethető úgy, mint a tér k darab síkjának közös része. $\boxed{\text{I}}$

Minden valós mátrixnak lépcsős alakja egyértelmű. $\boxed{\text{H}}$

Ha egy mátrix elemi sorműveletekkel egy másikba vihető, akkor redukált lépcsős alakjuk megegyezik. $\boxed{\text{I}}$

Elemi sorműveletek közben az oszloptér nem változik. $\boxed{\text{H}}$

Ha egy 8-ismeretlenes egyenletrendszer 16 egyenletből áll, nem lehet végtelen sok megoldása. $\boxed{\text{H}}$

Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak. $\boxed{\text{H}}$

Rögzített $\mathbf{A}$ mátrix mellett azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer megoldható, alteret alkotnak. $\boxed{\text{I}}$

Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként. $\boxed{\text{I}}$

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$. $\boxed{\text{H}}$

Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. $\boxed{\text{H}}$

3. Határozzuk meg az első ismeretlen értékét az

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

mátrixú egyenletrendszerben a Cramer-szabállyal! *(3 pont)*

$$\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4+3+20-6-8-5}{10-6} = 2$$

4. Az A lineáris leképezés standard bázisra vonatkozó mátrixa:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel e leképezés $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,2)\}$ bázisra vonatkozó $\mathbf{A}_{\mathcal{B}}$ mátrixát! *(6 pont)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = B_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$$

$$A_{\mathcal{B}} = B_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{E}} B_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Válasszunk ki a $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,0,6,6)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,-2,-1)$, $\mathbf{v}_4 = (1,2,-1,1)$ vektorok által kifeszített altérből egy bázist, és írjuk fel az összes vektor e bázisra vonatkozó koordinátás alakját! *(6 pont)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$\{v_1, v_2\}$ egy bázis

e bázisban:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását! *(4 pont)*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 + \frac{1}{2} S_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_3 - S_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Az alábbi mátrixok közül melyik diagonalizálható, melyik diagonalizálható ortogonálisan és melyik nem a valós test fölött? Nagyon röviden indokoljuk a válaszunk! *(3 pont)*

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

NEM — síkbeli forgatás

ORT. DIAG — szimmetrikus

DIAG — 3 különb. 1 dim sajátaltér

8. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait. Írjuk fel a sajátfelbontását, és ennek fölhasználásával számítsuk ki az $\mathbf{A}^6$ mátrixot! *(10 pont)*

Sajátértékek $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$

$$\lambda = -1: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad -3x + 3y = 0$$

$$x = y = 1$$

$$\underline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2: \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad -3x = 0$$

$$x = 0$$

$$\underline{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sajátfelbontás:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -63 & 64 \end{bmatrix}$$