MAT A2a – 1. ZH. – 2015. március 26. Név: ____________________ Gyakvez.: ______

1. *Feleletválasztás:* Mely válasz(ok) helyes(ek) az alábbi kérdésekre? A helyes választ/válaszokat egy X-szel jelöljük meg, a helytelent hagyjuk üresen! (Helyes kitöltés egy kérdésre 2 pont, minden hiba -1 pont, negatív pont nem kapható.)

1. Tekintsünk egy 4 vektorból álló $\mathbf{R}^5$-beli vektorrendszert, a belőlük képzett 5×4-es **A** mátrix rangja legyen 2.
   - (a) Sorterének és oszlopterének 2 a dimenziója. [X]
   - (b) **A** redukált lépcsős alakjának 2 zérussora van. [ ]
   - (c) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek végtelen sok vagy 0 megoldása is lehet. [X]
2. Hogyan változnak elemi sorműveletek közben a sor- és oszlopterek?
   - (a) A sortér nem változik. [X]
   - (b) Az oszloptér nem változik. [ ]
   - (c) A sortér sorai közti lineáris kapcsolatok nem változnak. [ ]
   - (d) Az oszloptér oszlopai közti lineáris kapcsolatok nem változnak. [X]
3. Melyek helyesek az alábbi mátrixműveletekre vonatkozó tulajdonságok közül?
   - (a) Ha $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$ és $\mathbf{C} \neq \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. [ ]
   - (b) Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, akkor vagy $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, vagy $\mathbf{B} = \mathbf{O}$. [ ]
   - (c) Ha **A** és **B** négyzetes valós mátrixok és $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, akkor $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ is fennáll. [X]
4. Egy $n \times n$-es determináns értéke kiszámítható az alábbi módokon:
   - (a) Kiválasztunk n elemet a determinánsból úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban egy legyen közülük, a többi számot 0-ra változtatjuk. Az így kapott determináns értékét kiszámoljuk, majd ezt megismételjük az összes lehetséges $n!$ különböző módon, és az így kapott értékeket összeadjuk. [X]
   - (b) Az elemi sorműveletek közül csak a hozzáadás (egy sor konstansszorosának másikhoz adása) műveletét alkalmazva felső háromszögalakra hozzuk, majd összeszorozzuk a főátlóban lévő elemeket! [X]
   - (c) Vesszük a második sorának $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ elemeit, a soruk és oszlopuk elhagyásával kapott $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2n}$ aldeterminánsokat, és képezzük a
   $$-a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} - \ldots + (-1)^n a_{2n}A_{2n}$$
   összeget. [X]
5. Mely állítások igazak egy négyzetes valós **A** mátrixra?
   - (a) Az, hogy **A** diagonalizálható, azt jelenti, hogy van olyan $\mathcal{B}$ bázis, melyben az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés mátrixa diagonális. [X]
   - (b) Minden mátrix diagonalizálható, melynek van n független sajátvektora. [X]
   - (c) Minden szimmetrikus mátrix diagonalizálható. [X]

2. Számítsuk ki az

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

determináns értékét! *(4 pont)*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

3. Az a és b paraméter értékeitől függően hány megoldása lehet az alábbi bővített mátrixú egyenletrendszernek? *(4 pont)*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{array}\right]$$

Feltétel	megold. száma	Miért?
$a = 2$	0	rang(A) = 2 rang(A|b) = 3
$a \neq 2$, $b \neq 0$	1	rang(A) = rang(A|b) = 3
$a = 3$, $b = 0$	∞	rang(A) = rang(A|b) = 2
$a \neq 3$, $b = 0$	0	rang(A) = 2 rang(A|b) = 3

4. Válasszunk ki a $\mathbf{v}_1 = (1,2,1,3)$, $\mathbf{v}_2 = (2,4,2,6)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,1,1)$, $\mathbf{v}_4 = (2,5,3,7)$ vektorok közül néhányat, melyek a négy vektor által kifeszített altérnek egy bázisát alkotják, és írjuk fel mind a négy vektor e bázisra vonatkozó koordinátás alakját! *(6 pont)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bázis: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, azaz $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [v_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [v_4]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Egy lineáris leképezés mátrixa a standard bázisban

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel mátrixát a

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorok alkotta bázisban! *(8 pont)*

Az áttérés mátrixa a $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ bázisról a standard $\mathcal{E}$ bázisra:

$$C = C_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek inverze:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{azaz} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} A_{\mathcal{E}} C_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = C^{-1} A C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix LU-felbontását! Ezt fölhasználva oldjuk meg az

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert! *(10 pont)*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$Ax = b \rightsquigarrow LUx = b \Longleftrightarrow Ly = b \text{ és } Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. Határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátaltereinek egy-egy bázisát! *(8 pont)*

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-6\right] =$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4) = (-1-\lambda)(-1-\lambda)(4-\lambda)$$

$$\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

Sajátértékek: $-1, -1, 4$

$\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to y+z=0$

$x = t$
$z = s$
$y = -s$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -s \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 4$: $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} x = 0 \\ 3y-2z=0 \end{matrix}$

$x = 0$
$z = t$
$y = \frac{2}{3}t$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$