MAT A2b – 2. ZH. – 2013. április 26. Név: ______________ Gyakvez.: ______

1. Számítsuk ki az alábbi határértéket ha létezik, vagy mutassuk meg, hogy nem létezik! *(4 pont)*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+x^2y} =$$

($y=mx$ mentén tartva $(0,0)$-hoz)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{xy^2}{x^3+x^2y} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{x^3+mx^3} \longrightarrow \frac{m^2}{1+m}$$

A határérték m-től függ, ~~nem~~ nem konstans $\Rightarrow$ NINCS hat. ért.

2. Határozzuk meg az $f(x,y)=x^2-y^3$ függvény $(2,1)$ pontbeli iránymenti deriváltját a $(8,-6)$ irányban! *(4 pont)*

$$\nabla f(2,1) = (2x,-3y^2)\Big|_{(2,1)} = (4,-3)$$

1. mo: $(4,-3) \uparrow\uparrow (8,-6) \Rightarrow$ a grad irányú i.menti derivált $=|\text{grad}|$, azaz $D_{(8,-6)}f(2,1) = |(4,-3)| = 5$

2. mo: $D_{(8,-6)}f(2,1) = (4,-3)\cdot\dfrac{(8,-6)}{|(8,-6)|} = (4,-3)\cdot\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right) = 5$

3. Ismerjük az f függvény egy gradiensét: $\nabla f(1,2)=(3,-2)$. Határozzuk meg az $x\mapsto f(x^2,\sin(x-1)+2x)$ függvény deriváltját az $x=1$ helyen a láncszabályt alkalmazva! *(4 pont)*

$u=x^2$, $u_x=2x$, $u(1)=1$, $u_x(1)=2$

$v=\sin(x-1)+2x$, $v_x=\cos(x-1)+2$, $v(1)=2$, $v_x(1)=3$

$\dfrac{d}{dx}f(u,v) = f_u\cdot u_x + f_v\cdot v_x$, $x=1$ helyen:

$\dfrac{d}{dx}f(1,2) = f_u(1,2)\cdot 2 + f_v(1,2)\cdot 3 = 3\cdot 2 - 2\cdot 3 = 0$

4. Határozzuk meg az $(x,y)\mapsto(x+y^2,2xy+1)$ leképezés $(2,1)$ ponthoz tartozó deriváltleképezésének mátrixát! Ezt és $f(2,1)$ értékét fölhasználva becsüljük meg az $f(2.01,0.99)$ értéket! *(6 pont)*

$$\begin{bmatrix}1 & 2y\\ 2y & 2x\end{bmatrix}_{(2,1)} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$f(2,1)=(3,5)$

$$f(2.01,0.99) \approx \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.01\\-0.01\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.99\\4.98\end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg az $f(x,y)=x^3+2y^2+2xy-2$ függvény lokális szélsőértékhelyeit és azok minőségét! *(8 pont)*

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 3x^2+2y = 0\\ f_y &= 4y+2x = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow x=-2y \Rightarrow$$

$12y^2+2y=0 \Rightarrow 2y(6y+1)=0 \Rightarrow$

$$\left\{\begin{matrix} y=0 & x=0\\ y=-\frac{1}{6} & x=\frac{1}{3}\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix} =$$

$= \begin{cases} (0,0)\text{-ban: } \begin{vmatrix}0&2\\2&4\end{vmatrix} = -4 & \text{NYEREGPONT}\\ \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right)\text{-ban: } \begin{vmatrix}2&2\\2&4\end{vmatrix} = 4>0,\ 2>0 & \text{MINIMUM}\end{cases}$

6. Írjuk fel az $f(x,y) = x^4 + 3x^2y - 5y$ függvény grafikonját az $(1,2,-3)$ pontban érintő sík egyenletét! *(4 pont)*

az érintő sík normálvektora

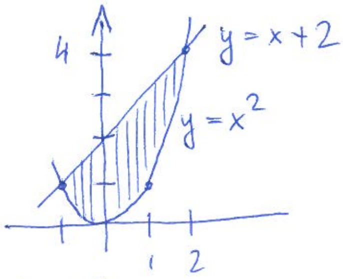
$(f_x, f_y, -1) = (4x^3+6xy,\ 3x^2-5,\ -1)$

az $(1,2)$-ben: $(f_x(1,2),\ f_y(1,2),\ -1) = (16,-2,-1)$

az egyenlet: $16(x-1) - 2(y-2) - (z+3) = 0$

azaz $16x - 2y - z = 15$

7. Számítsuk ki az $f(x,y) = 1 + x$ függvénynek az $y = x + 2$ és az $y = x^2$ görbék által határolt tartományon vett integrálját! *(6 pont)*



$x^2 = x + 2$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$

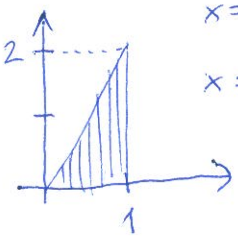
$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} 1+x \, dy\, dx = \int_{-1}^{2} \Big[(1+x)y\Big]_{x^2}^{x+2} dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (1+x)(x+2-x^2)\, dx = \int_{-1}^{2} -x^3 + 3x + 2 \, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = 6 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{4}$$

8. Számítsuk ki az alábbi integrált az integrálás sorrendjének cseréjével: *(8 pont)*

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 \sin x^2 \, dx \, dy$$



$x = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2x$

$x = 1$

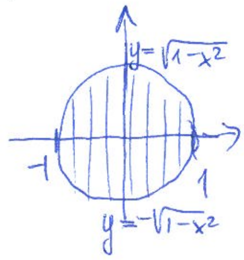
$$= \int_0^1 \int_0^{2x} \sin x^2 \, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \Big[y \sin x^2\Big]_0^{2x} dx = \int_0^1 2x \sin x^2 \, dx$$

$$= \Big[-\cos x^2\Big]_0^1 = 1 - \cos 1$$

9. Számítsuk ki az alábbi integrált polárkoordinátákra térve! *(6 pont)*

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} \, dy \, dx$$



$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{r^2} \cdot r \, d\vartheta\, dr =$$

$$= \int_0^1 2\pi r e^{r^2} dr = \pi \int_0^1 (2r) e^{r^2} dr =$$

$$= \pi \Big[e^{r^2}\Big]_0^1 = \pi(e-1)$$