MatA2a – 2. ZH. – 15-04-30. Neptun ________ Név ________________ BG HE KS MT MZ PK

h8 10 k sz8 10 2 cs8 2 p8 12

1. Abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens az alábbi sor? *(3 pont)*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k^3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\cos k}{k^3}\right| < \sum \frac{1}{k^3},$$ mert $|\cos k| < 1$ (majoráns kritérium)

tehát a sor abszolút konvergens.

2. Határozzuk meg az alábbi hatványsor konvergencia-tartományát! *(9 pont)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}(x-1)^n$$

$$\frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{n+2}(x-1)^{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}(x-1)^n\right|} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\,\frac{n+1}{n+2}\,|x-1| \longrightarrow |x-1| < 1 \qquad x \in (0,2)$$

$x=0$: $\sum \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}(-1)^n = \sum \frac{\sqrt{n}}{n+1} > \sum \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergens

$x=2$: $\sum \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}1^n = \sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \to 0$

$\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ monoton csökkenő: $\frac{\sqrt{n}}{n+1} > \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$

$(n+2)\sqrt{n} > (n+1)\sqrt{n+1}$

$n^3 + 4n^2 + 4n > n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$n^2 + n - 1 > 0$

váltakozó előjelű $\Rightarrow$ konvergens (feltételesen)

Konvergenciatartomány: $(0, 2]$

3. Írjuk le az $\sqrt{1+x}$ Maclaurin-sorának (azaz 0 körüli Taylor-sorának) első 4 tagját! *(4 pont)*

1\. mo: $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1}x + \binom{\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + \dots$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$

$\binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2} \qquad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{16}$

2\. mo: $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}$

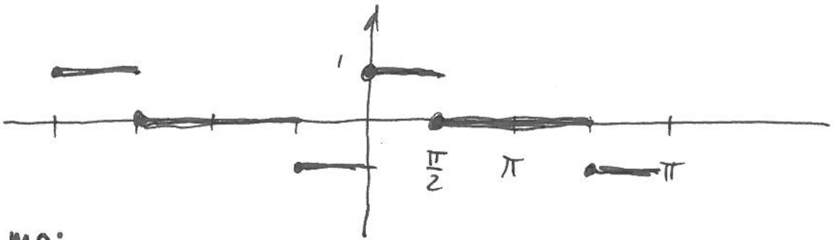
$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \qquad f'''(0) = \frac{3}{8}$

$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$

4. Írjuk fel a 2π szerint periodikus

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}, \\ -1, & \frac{3\pi}{2} \leqslant x < 2\pi. \end{cases}$$

függvény Fourier-sorának első három nullától különböző tagját! *(6 pont)*



1\. mo:

A szakadási helyeket nem tekintve a fv. páratlan, tehát elég a b_k együtthatókat számolni:

$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

$b_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin 3x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3\pi}$

Fourier-sor: $\frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{\pi}\sin 2x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \dots$

2\. mo.

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{k} - \frac{\cos(k\frac{\pi}{2})}{k}$

5. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = x^2y^3z^6$ függvény $P(1,1,1)$ pontbeli gradiensvektorát! Határozzuk az f függvény P pontbeli iránymenti deriváltjainak maximumát! *(4 pont)*

$f_x(1,1,1) = 2xy^3z^6\big|_{(1,1,1)} = 2$

$f_y(1,1,1) = 3x^2y^2z^6\big|_{(1,1,1)} = 3$

$f_z(1,1,1) = 6x^2y^3y^5\big|_{(1,1,1)} = 6$

$\nabla f(1,1,1) = (2,3,6)$

a maximális iránymenti derivált

$= |\nabla f(1,1,1)| = |(2,3,6)| = 7$

6. Írjuk fel az alábbi függvények Jacobi-mátrixát a megadott helyen! *(6 pont)*

(a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto xy$, $(1,2)$,

$$\begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix}\Big|_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $(x,y) \mapsto (xy, x+y)$, $(1,2)$,

$$\begin{bmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) $x \mapsto \begin{bmatrix} x^2+1 \\ x-1 \end{bmatrix}$, $x = 1$.

$$\begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix}_{x=1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. Határozzuk meg az $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$ függvény lokális szélsőértékeit, ezek helyét, és a nyeregpontokat! *(7 pont)*

$$\left.\begin{array}{ll} f_x(x,y) = 4y - 4x^3 = 0 & y = x^3 \\ f_y(x,y) = 4x - 4y^3 = 0 & x = y^3 \end{array}\right\} \quad x = y^3 = x^9 \quad 1 = x^8 \qquad x = 0 \quad x = -1,\ x = 1$$

Kritikus pontok $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,1)$

$f_{xx}(x,y) = -12x^2$

$f_{xy}(x,y) = 4$

$f_{yy}(x,y) = -12y^2$

$(0,0)$: $\det\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} < 0$ nyeregpont

$(-1,-1)$: $\det\begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} > 0$, $f_{xx}(-1,-1) < 0$ MAX $f(-1,-1) = 2$

$(1,1)$: $\det\begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} > 0$, $f_{xx}(1,1) < 0$ MAX $f(1,1) = 2$

8. Legyen $f(x,y) = x^3 - 2y^2 - 3$. Az $f(2,1)$ érték felhasználásával adjuk meg az $f(1.99, 1.01)$ értékének lineáris közelítését! *(5 pont)*

$$f(2,1) = 2^3 - 2\cdot 1^2 - 3 = 3 \qquad dx = -0.01 \quad dy = 0.01$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(2,1) &= 3x^2\big|_{(2,1)} = 12 \\ f_y(2,1) &= -4y\big|_{(2,1)} = -4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} df &= f_x dx + f_y dy = 12\cdot(-0.01) - 4\cdot 0.01 \\ &= -0.12 - 0.04 = -0.16 \end{aligned}$$

$$f(1.99, 1.01) \approx f(2,1) + df = 3 - 0.16 = 2.84$$

(a pontos érték 2.8404)

9. Mekkora annak a testnek a térfogata, melyet alulról az xy-sík, felülről az $x + y + z = 4$ egyenletű sík, oldalról az $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$ egyenletű síkok határolnak! *(6 pont)*

Az integrálandó függvény $z = 4 - x - y$

$$\int_1^2 \int_0^2 4 - x - y \, dx\, dy = \int_1^2 \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_0^2 dy = \int_1^2 6 - 2y \, dy$$

$$= \left[6y - y^2\right]_1^2 = 12 - 4 - (6 - 1) = 3$$